

**Análise de Vibrações Não-Lineares de Vigas com Dano
pelo
Método dos Elementos Finitos tipo-p**

Gonçalo Maria Pereira das Neves Carneiro

Dissertação do MIEM

Professor Pedro Manuel Leal Ribeiro



FEUP

**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Junho 2014

DEDICATÓRIA

Aos meus Pais.

Aos meus Amigos, companheiros nesta Aventura que agora termina.

Ao Orfeão Universitário do Porto.

RESUMO

Na presente dissertação, apresentam-se três modelos de elementos finitos tipo-p distintos, para a análise dinâmica de vigas unidimensionais com dano em regime transiente e permanente, sujeitas a vibrações em regime forçado harmónico. O primeiro modelo é baseado na teoria de vigas de Timoshenko e o dano caracteriza-se por um entalhe de duas dimensões: largura e profundidade. O algoritmo deste modelo avalia a posição relativa das duas extremidades do entalhe e determina o seu estado, se aberto ou fechado. São considerados deslocamentos longitudinais, transversais e de rotação. O sistema de equações diferenciais do movimento é obtido pela aplicação do *princípio dos trabalhos virtuais*. Considera-se amortecimento proporcional de rigidez. O segundo modelo baseia-se na *teoria unidimensional de vigas Euler-Bernoulli com dano* de Christides e Barr e o dano é caracterizado por uma fenda bilinear. O elemento apenas se deforma na direcção transversal. A forma fraca do sistema de equações diferenciais do movimento é obtida pela aplicação do *método dos resíduos pesados de Galerkin*. É considerado amortecimento proporcional de rigidez. No final, é ainda apresentada uma primeira aproximação à extensão da teoria de Christides e Barr para não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán. Consideram-se deslocamentos longitudinais e transversais. São analisadas vigas isotrópicas e elásticas. São analisadas vigas encastradas-livres e duplamente encastradas. São feitas simulações para várias frequências de excitação, profundidades de fenda e entalhe e para vigas de dimensões diferentes. As soluções são apresentadas sob a forma de representações gráficas da resposta no tempo, plano de fase, secção de Poincaré e espectro de amplitudes e discutidas qualitativamente. Conclui-se que, em regime permanente, na existência de uma fenda bilinear, as respostas são não-lineares periódicas. As soluções são claramente assimétricas em amplitude, apresentam harmónicos da frequência base e confirma-se a necessidade de definir uma frequência natural de vibração bilinear. Contrariamente, um entalhe mantém sempre um comportamento linear no tempo, com respostas lineares periódicas. Em regime transiente, verifica-se que a existência de não linearidades contribui para uma lenta dissipação da resposta transitória. De uma forma geral, nesta fase, as respostas caracterizam-se por oscilações de duas frequências incomensuráveis, temporárias, podendo ser aproximadas, em períodos de tempo finitos, a movimentos quase periódicos. Os resultados obtidos com a introdução da não – linearidades do tipo geométrica mostram que a presença de uma fenda bilinear origina movimentos não lineares periódicos, tal como se havia observado para o modelo linear. Mais conclusões não deverão ser feitas neste modelo sem evidência experimental adequada. É ainda apresentado um conjunto de funções cúbicas

baseadas na teoria de Timoshenko, originalmente desenvolvidas para aplicação em elementos de viga tridimensionais, e analisada a convergência de resultados para as frequências naturais, na aplicação em uma teoria unidimensional.

ABSTRACT

In this thesis, three p-type finite element models are presented for the dynamic analysis of one-dimensional damaged beams, in steady and transient states, subjected to a harmonic force. The first model is based on the *beam theory of Timoshenko* and its damage is characterized as a two-dimensional notch. The model is able to evaluate the relative position of the two extremities of the notch and determines whether its state is opened or closed. Longitudinal, transversal and rotational motions are considered. The differential equation of motion is obtained by applying the *principle of virtual work*. Stiffness-proportional damping is considered. The second model is based on Christides and Barr's *one-dimensional theory of cracked Euler-Bernoulli beams* and its damage is characterized as a bilinear crack. Only transversal movement is considered. The weak form of the differential equation of motion is obtained by applying the *Galerkin's method of weighted residuals*. Stiffness-proportional damping is considered. At the end, it is presented a first approximation to the extension of the theory developed by Christides and Barr with Von Kármán-type geometrical nonlinearity. Longitudinal and transverse motions are considered. In all models elastic and isotropic beams are considered. Clamped-free and clamped-clamped beams are analyzed. Several simulations are carried out for different frequencies, damage depths and dimensions of the beams. Solutions are presented in the form of graphical representations of the time-response, phase plans, Poincaré sections and frequency spectrums. It is concluded that, in a steady state and in the presence of a bilinear crack, responses are non-linear periodic. Solutions are asymmetric with respect to the amplitudes of motion, there are harmonics of the basis frequency and it is necessary to define a bilinear natural frequency. Conversely, a notch keeps its linear behavior over the time, with linear periodic time-responses. In transient state, it is seen that the existence of non-linear solutions contributes for a slow dissipation of the transitory response. At this stage, time-responses are characterized as temporary oscillations of two incommensurable-frequencies, which can be approximated, during finite time periods, as quasi periodic motions of two frequencies. The results obtained with the introduction of geometrical nonlinearity show that the presence of a bilinear crack creates nonlinear periodic motions too. More complex conclusions shall not be done with this model without proper experimental results. A group of cubic hermitian polynomials, based on the beam theory of Timoshenko, and originally developed for a three-dimensional model, is presented and the convergence of results obtained with its application is analyzed.

AGRADECIMENTOS

Ao meu grande amigo Zé Pedro, pela pronta ajuda e amizade de sempre... E por todas as entusiasmadas boleias que me pediu às ‘cinco da madrugada’, após longas noites de trabalho.

Ao Professor José Dias Rodrigues, o meu reconhecimento pelo conteúdo facultado.

Ao Professor Pedro Manuel Leal Ribeiro, o meu obrigado pelas horas de trabalho e de conversa perdidas em meu favor, e que tornaram esta dissertação num bom desafio.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3. 1 - Viga com entalhe e dimensões. [42]	20
Figura 3. 2 - Representação gráfica das funções de dano. [42]	23
Figura 3. 3 - Polinómios cúbicos de Hermite. [42].....	24
 Figura 4. 1 - Dimensões de uma viga com fenda duplamente encastrada	43
 Figura 6. 1 - Dimensões de uma viga com entalhe duplamente encastrada.....	65
Figura 6. 2 - Dimensões de uma viga com entalhe encastrada	65
Figura 6. 3 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	68
Figura 6. 4 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	69
Figura 6. 5 - Posição dos pontos X_A e X_B do entalhe. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	70
Figura 6. 6 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	71
Figura 6. 7 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	71
Figura 6. 8 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	72
Figura 6. 9 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	72
Figura 6. 10 - Espectros de Amplitude. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	74
Figura 6. 11 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	75
Figura 6. 12 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	75
Figura 6. 13 - Posição dos pontos X_A e X_B do entalhe. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	76
Figura 6. 14 - Ângulo de fase ϕ em função da razão de frequências β tendo como parâmetro a razão de amortecimento ξ . Reproduzido com autorização de J. Dias Rodrigues [35]	77
Figura 6. 15 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	78
Figura 6. 16 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	78
Figura 6. 17 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	79
Figura 6. 18 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	79
Figura 6. 19 - Espectros de Amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	80
Figura 6. 20 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	83
Figura 6. 21 - Posição dos pontos X_A e X_B . Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	84
Figura 6. 22 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	85
Figura 6. 23 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	85
Figura 6. 24 - CE2 Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	86
Figura 6. 25 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	86
Figura 6. 26 - Posição dos pontos X_A e X_B do entalhe. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	87
Figura 6. 27 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	88
Figura 6. 28 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	88
Figura 6. 29 - CE2 Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga encastrada. $\omega = \omega_1$	89
Figura 6. 30 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	90
Figura 6. 31- Posição dos pontos X_A e X_B . Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	91
Figura 6. 32 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	92
Figura 6. 33 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	92
Figura 6. 34 - CE1 Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	93

Figura 6. 35 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	95
Figura 6. 36 – CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	96
Figura 6. 37 – CE2 Plano de Fase $10,000283 < t < 10,008378$ [s]. Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	97
Figura 6. 38 - CE Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	98
Figura 6. 39 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	98
Figura 6. 40 – CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	99
Figura 6. 41 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	99
Figura 6. 42 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	100
Figura 6. 43 – CE2 Resposta no Tempo 0,3s após abertura do entalhe. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$..	101
Figura 6. 44 – CE1 Resposta no Tempo 5s após abertura do entalhe. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	102
Figura 6. 45 – CE2 Resposta no Tempo 3,3s após abertura do entalhe. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$..	102
Figura 6. 46 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	103
Figura 6. 47 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	103
Figura 6. 48 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	104
Figura 6. 49 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	104
Figura 6. 50 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	105
Figura 6. 51 - CE2 Plano de Fase 0,1s após abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	106
Figura 6. 52 - CE2 Plano de Fase 0,4s após abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	106
Figura 6. 53 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	107
Figura 6. 54 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$	108
Figura 6. 55 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	108
Figura 6. 56 - CE2 Resposta no Tempo 25s após abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	109
Figura 6. 57 - CE2 Plano de Fase no instante de abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	110
Figura 6. 58 - CE2 Plano de Fase 0,05s após abertura entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	110
Figura 6. 59 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	111
Figura 6. 60 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$	111
Figura 6. 61 – CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	112
Figura 6. 62 – CE1 Resposta no Tempo no instante de abertura do entalhe. Viga encastrada. $\omega = \omega_{2d}$	112
Figura 6. 63 – CE1 Resposta no Tempo 3,7s após de abertura do entalhe. Viga encastrada. $\omega = \omega_{2d}$	113
Figura 6. 64 - CE1 Plano de Fase no instante de abertura entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	114
Figura 6. 65 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$	114
Figura 6. 66 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga encastrada. $\omega = \omega_{2d}$	115
Figura 7. 1 - Dimensões de uma viga com fenda duplamente encastrada	120
Figura 7. 2 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	122
Figura 7. 3 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	123
Figura 7. 4 - CE1 Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	124
Figura 7. 5 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	125
Figura 7. 6 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	125
Figura 7. 7 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	126
Figura 7. 8 -- CE1 Zoom Plano de Fase $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	126
Figura 7. 9 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	127
Figura 7. 10 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	127
Figura 7. 11 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	128
Figura 7. 12 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	129
Figura 7. 13 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	129

Figura 7. 14 - CE1 Zoom Resposta no Tempo com fenda. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	130
Figura 7. 15 - CE2 Zoom Resposta no Tempo com fenda. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	130
Figura 7. 16 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	132
Figura 7. 17 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	132
Figura 7. 18 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	133
Figura 7. 19 - CE2 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,009$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	133
Figura 7. 20 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	134
Figura 7. 21 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	134
Figura 7. 22 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	135
Figura 7. 23 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$	137
Figura 7. 24 - CE1 Zoom Resposta no Tempo. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$	138
Figura 7. 25 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$	139
Figura 7. 26 - CE1 Zoom Plano de Fase. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$	139
Figura 7. 27 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$	140
Figura 7. 28 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$	141
Figura 7. 29 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	142
Figura 7. 30 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	142
Figura 7. 31 - CE2 Resposta no Tempo 0,6s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	143
Figura 7. 32 - CE1 Resposta no Tempo 15s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	143
Figura 7. 33 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	144
Figura 7. 34 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	145
Figura 7. 35 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	146
Figura 7. 36 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	146
Figura 7. 37 - CE2 Evolução na Secção de Poincaré. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	147
Figura 7. 38 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	148
Figura 7. 39 - CE1 Resposta no Tempo 10s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	149
Figura 7. 40 - CE2 Resposta no Tempo 2s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	149
Figura 7. 41 CE1 Resposta no Tempo 15s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	150
Figura 7. 42 - CE2 Resposta no Tempo 5s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	150
Figura 7. 43 - CE1 Plano de Fase 4,5s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	151
Figura 7. 44 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	151
Figura 7. 45 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	152
Figura 7. 46 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	152
Figura 7. 47 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	153
Figura 7. 48 - CE2 Evolução na Secção de Poincaré. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	153
Figura 7. 49 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	154
Figura 7. 50 - CE1 Resposta no Tempo no instante de abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	155
Figura 7. 51 - CE1 Resposta no Tempo 1s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	155
Figura 7. 52 - CE1 Plano de Fase no instante de abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	156
Figura 7. 53 - CE1 Plano de Fase no instante de abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	157
Figura 7. 54 - CE1 Estabilidade no plano de fase, quase regime permanente	157
Figura 7. 55 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	158
Figura 7. 56 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$	158
Figura 7. 57 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	160
Figura 7. 58 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	161
Figura 7. 59 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	162
Figura 7. 60 - CE1 Zoom Plano de Fase $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	162
Figura 7. 61 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$	163

Figura 7. 62 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$	164
Figura 7. 63 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$	165
Figura 7. 64 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$	166
Figura 7. 65 - CE1 Zoom Plano de Fase $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$	166
Figura 7. 66 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$	167
Figura 7. 67 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	168
Figura 7. 68 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	168
Figura 7. 69 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	169
Figura 7. 70 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	170
Figura 7. 71 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$	170
Figura 7. 72 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. $\omega = \omega_1$	171

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4. 1 – Valores de βl para as condições de fronteira de encastramento e duplo encastramento [35].....	42
Tabela 6. 1 – Dimensões e propriedades materiais comuns a todas as vigas.....	66
Tabela 6. 2 – Graus de liberdade, dimensões do entalhe e const. de amortecimento. Vigas duplamente encastradas	67
Tabela 6. 3 – CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas duplamente encastradas	67
Tabela 6. 4 – CE2 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas duplamente encastradas	67
Tabela 6. 5 - CE2 $h_1=0,009$. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e Stojanovic et al.. Diferença [%]. Vigas duplamente encastradas	68
Tabela 6. 6 - Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p. Vigas com entalhe. Vigas duplamente encastradas	68
Tabela 6. 7 - Graus de liberdade, dimensões do entalhe e const. de amortecimento. Vigas encastradas	81
Tabela 6. 8 - CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas encastradas-livres	81
Tabela 6. 9 – CE2 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas encastradas-livres	82
Tabela 6. 10 - Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p. Vigas com entalhe. Vigas encastradas-livres	82
Tabela 6. 11 – CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelas novas funções vs. funções tradicionais	116
Tabela 6. 12 - CE1 com entalhe. Frequências naturais [rad/s] pelas novas funções vs. funções tradicionais	116
Tabela 7. 1 - Dimensões geométricas da viga e fenda. Vigas duplamente encastradas	120
Tabela 7. 2 - Propriedades materiais e graus de liberdade. Vigas duplamente encastradas.....	120
Tabela 7. 3 - CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e teoria EB. Diferença [%]. Viga duplamente encastrada	121
Tabela 7. 4 - CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e teoria EB. Diferença [%]. Viga duplamente encastrada	121
Tabela 7. 5 - Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p. Vigas com fenda. Viga duplamente encastrada.....	121

ÍNDICE

Capítulo 1 Introdução

1.1 Introdução e Estado-da-arte.....	1
1.2 Objectivos e organização.....	3

Capítulo 2 O método dos elementos Finitos Tipo-p

2.1 Introdução.....	7
2.2 O Método dos Elementos Finitos tipo-p.....	7

Capítulo 3 Vigas com Entalhe

3.1 Introdução.....	15
3.2 Frequências naturais pela teoria de timoshenko	15
3.3 Formulação do MEF tipo-p para Análise Dinâmica de uma Viga Timoshenko com Dano	19
3.4 Formulação de um Conjunto de Funções de Forma Hermiteanas, Segundo a Teoria de Timoshenko	32
3.5 Fecho do Capítulo.....	36

Capítulo 4 Vigas com Fenda Bilinear

4.1 Introdução.....	39
4.2 Frequências Naturais pela Teoria de Euler-Bernoulli	39
4.3 Formulação do MEF tipo-p para Análise Dinâmica de uma Viga Euler-Bernoulli com Dano, pelo Método dos Resíduos Pesados de Galerkin	42
4.4 Fecho do Capítulo.....	51

Capítulo 5 Primeira Aproximação à Teoria de Christides e Barr, para Não-Linearidade Geométrica

5.1 Introdução.....	53
5.2 Primeira Aproximação à Teoria de Christides e Barr, para Não-Linearidade Geométrica	53
5.3 Fecho do Capítulo.....	62

Capítulo 6 Resposta Dinâmica de Vigas com Entalhe

6.1 Introdução	64
6.2 Resposta Dinâmica de Vigas Timoshenko com Dano.....	66
6.2.1 Resposta em Regime Permanente.....	66
6.2.1.1 Vigas Duplamente Encastradas	66
6.2.1.2 Vigas Encastradas-Livres	81
6.2.2 Resposta em Regime Transiente.....	93
6.2.2.1 Vigas Duplamente Encastradas	95
6.2.2.2 Vigas Encastradas-Livres	104
6.3 Frequências Naturais Pelas Funções Hermitenas, Segundo a Teoria de Timoshenko	115
6.4 Fecho do Capítulo.....	116

Capítulo 7 Resposta Dinâmica de Vigas com Fenda

7.1 Introdução	119
7.2 Resposta Dinâmica de Vigas Euler-Bernoulli com Dano	122
7.2.1 Resposta em regime permanente	122
7.2.2 Resposta em Regime Transiente.....	141
7.3 Resposta Dinâmica de Vigas Euler-Bernoulli com Dano, para Não-Linearidade Geométrica.....	159
7.4 Fecho do Capítulo.....	171

Capítulo 8 Revisão e Conclusões

8.1 Revisão	175
8.2 Conclusões.....	177
8.3 Propostas de Trabalho Futuro	179
Referências	181

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO E ESTADO-DA-ARTE

A detecção de dano em estruturas é uma das áreas em franco progresso na engenharia. Novas técnicas não-intrusivas surgem frequentemente com o objectivo de oferecer soluções mais rigorosas que permitam não só estimar a dimensão do dano, como também a sua localização. Sabendo que são frequentes as limitações em recursos laboratoriais que permitem a validação destas técnicas, e com o recente desenvolvimento computacional, paralelamente aos avanços técnicos dão-se avanços no campo da simulação numérica de estruturas danificadas. O método numérico mais utilizado é o método dos elementos finitos, nas suas várias versões. Contudo, não obstante a já extensa pesquisa na área, ainda muitas questões estão por responder, principalmente devido às simplificações de natureza física que as limitações computacionais do passado obrigavam a fazer. Devido à sua simplicidade e, ainda assim aplicabilidade nas mais diversas estruturas, a maioria dos estudos de estruturas danificadas recai na análise fendas, que posteriormente podem ser assembladas para formarem modelos mais complexos. Existem, essencialmente, três abordagens diferentes à modelação de dano em vigas, apresentadas na literatura: redução local da rigidez, modelos de molas discretas e modelos bi e tridimensionais mais complexos [21].

Os estudos iniciais na área datam da década de setenta [16]. Eram essencialmente experimentais e culminaram com o desenvolvimento de algumas teorias semi-empíricas, que ofereciam soluções de forma fechada para a determinação das formas vibração e da resposta do sistema. Talvez aquela que é uma das teorias de vigas com dano mais conhecida é a *teoria unidimensional de vigas Euler-Bernoulli com fendas*, de Christides e Barr [14]. Os autores propõem uma teoria assente em inúmeras suposições e simplificações, de modo a garantirem a sua aplicabilidade. A teoria consiste numa modelação aproximada do campo de tensões, definida por um decaimento exponencial das mesmas na secção da fenda. A abordagem ao problema é justificada com a teoria de Saint Venant e várias soluções na forma exponencial que dela resultam. Definem também, por via experimental, um parâmetro de ajuste, α , com base na alteração das frequências naturais com a profundidade da fenda. A teoria resulta no

desenvolvimento de uma equação diferencial do movimento que reflecta a variação da rigidez e o seu efeito no movimento da viga e, no final, é apresentada uma solução de forma fechada para a primeira forma natural de vibração, no caso particular de uma viga de secção rectangular e constante. A teoria é desenvolvida para um par de fendas, de forma a evitar qualquer assimetria no eixo neutro e acoplamento entre deslocamentos.

Mais recentemente, Sinha et al. [39], propõem uma simplificação à teoria de Christides e Barr. Consideram que a existência de apenas uma fenda numa das faces da fenda não altera significativamente a posição do eixo neutro, que a variação da rigidez (ou flexibilidade), na proximidade da fenda, segue uma lei linear, em vez de uma exponencial, e validam as aproximações feitas. O modelo de elementos finitos desenvolvido pelos autores tem o propósito de apoiar uma nova técnica simplificada de detecção de dano em estruturas de viga, sujeitas a vibração transversal. É adoptado um comportamento linear da fenda, que se mantém sempre aberta. Resultados concordantes com medição experimental são obtidos, embora os autores salvaguardem a maior precisão na previsão da localização da fenda do que da sua profundidade.

Ainda no seguimento do trabalho de Christides e Barr, Chondros et al. [11] - [13] apresentam uma actualização, ou reformulação, daquela teoria com recurso à mecânica da fractura para a modelação do campo de tensões na extremidade da fenda. A nova teoria é também formulada pelo princípio variacional de Hu-Washizu- Barr, sendo agora suportada por um fundamento mais teórico, onde a componente empírica está relacionada com a determinação do factor de intensidade de tensão. Os autores apresentam ainda numa outra publicação, a aplicação da solução desenvolvida pelo método dos elementos finitos e para uma fenda bilinear.

De uma forma geral, a existência de uma fenda é caracterizada por apenas influenciar a rigidez dos sistemas. Alguns autores consideram também uma redução local de massa, considerando o dano do tipo “entalhe”. Stojanovic et al. [42] apresentam um modelo de elementos finitos tipo-p para o estudo de vigas com entalhe. O modelo é baseado na teoria de vigas de Timoshenko e o entalhe considerado sempre aberto. Uma das limitações do método dos elementos finitos tipo-p está relacionada com a sua fraca sensibilidade a singularidades no interior do domínio de cada elemento. De forma a reduzir essa limitação, os autores introduzem um novo conjunto de funções de forma dependentes da localização do dano e construídas com base em polinómios cúbicos, assegurando a propriedade hierárquica do método. O estudo conclui que a nova abordagem permite uma convergência mais rápida dos resultados, quando comparado com o MEF tradicional e com o mesmo método sem o novo conjunto de funções. Verifica-se também que a presença de dano provoca alterações nos modos de vibração,

principalmente na sua componente longitudinal, na qual se observa uma alteração abrupta na localização do entalhe, por vezes com alteração da direcção do movimento longitudinal. Verifica-se que o acoplamento entre deslocamentos, causados pela assimetria do eixo neutro e pela não-linearidade geométrica, origina vibrações transversais assimétricas.

A existência de fendas em estruturas é geralmente detectada pela análise linear da resposta vibratória dos sistemas, como por exemplo a medição da variação das frequências naturais e alterações nos modos de vibração. No entanto, a análise linear é pouco sensível ao aparecimento de defeitos e não muito útil na sua detecção. Sabendo que a presença de uma fenda introduz componentes não-lineares na resposta, recentemente têm aparecido estudos nesse sentido, possivelmente potenciados pela capacidade computacional actualmente disponível no mercado. Andreus et al. [3] - [4] apresentam um modelo bidimensional de elementos finitos, para uma viga encastrada sujeita a excitação harmónica. No modelo, não só consideram uma fenda bilinear como também o contacto, sem atrito, entre as faces da mesma. Os autores mostram as alterações da resposta em regime não-linear. Verificam a excitação de sub e super harmónicos, a existência de um comportamento quási-impulsivo e a um fenómeno designado por *duplicação de período*, no qual o sistema passa para um novo estado com o dobro do período do sistema original, após alteração dos seus parâmetros. Estas características da resposta, resultarão segundo os autores dos múltiplos impactos entre as faces da fenda.

1.2 OBJECTIVOS E ORGANIZAÇÃO

A presente tese representa primeiramente uma extensão do trabalho desenvolvido por Stojanovic et al. [42]. O modelo de elementos finitos desenvolvido é aqui actualizado do ponto de vista do comportamento do entalhe, que foi considerado sempre aberto pelos autores. O algoritmo, agora capaz de determinar a posição relativa das duas extremidades do entalhe, verifica se estas coincidem ou sobrepõem, considerando nessa altura que a viga se aproxima a um sistema intacto. São ainda analisadas as respostas tanto em regime permanente como em regime transiente, resultante da abertura do entalhe a meio do movimento. Contudo, por motivos de simplificação do modelo, são apenas consideradas relações lineares quer entre tensões e deformações, quer entre deformações e deslocamentos. O motivo de interesse deste estudo será perceber até que ponto existirá a possibilidade de o entalhe fechar e introduzir um comportamento não linear no sistema. Posteriormente é introduzido um conjunto de novas funções de forma hermiteanas, derivadas por A. Bazoune et al. [8], segundo a teoria de

Timoshenko, e avaliada a sua convergência no que respeita às frequências naturais. Este conjunto de funções foi formulado para um modelo tridimensional. Pretende-se agora verificar se a sua aplicação num modelo unidimensional traz vantagens significativas ao nível do custo computacional, no sentido de ser obtida convergência para um número inferior de graus de liberdade. Os polinómios apresentados nesta tese foram reformulados, a partir do mesmo processo utilizado pelos autores, pois os referenciais adoptados nos dois trabalhos não coincidem. Verifica-se que, ao considerar nulos os termos correspondentes à rotação da secção recta e ao corte, os polinómios são iguais aos já conhecidos polinómios cúbicos de Hermite, muito comuns no método dos elementos finitos e que são muitas vezes derivados pela teoria de Euler-Bernoulli.

De seguida é introduzido um modelo de elementos finitos tipo-p, com base na teoria de Christides e Barr, no qual o dano é considerado como uma fenda bilinear de uma dimensão, a profundidade. Ao contrário do modelo anterior, onde se considera a redução local de massa e rigidez, neste só a rigidez é afectada na proximidade da fenda. Ainda de acordo com a teoria vigente, apenas são considerados deslocamentos transversais. O desenvolvimento deste modelo é bastante pertinente, na medida em que o estudo do comportamento não-linear de estruturas de viga com fendas tem sido amplamente discutido, num passado recente, e inúmeras questões estão ainda por responder

Um terceiro modelo é apresentado, embora sem o compromisso dos dois anteriores. Trata-se de uma primeira abordagem à extensão da teoria de Christides e Barr, para não-linearidade geométrica de Von Kármán. Para além da esperada não-linearidade imposta pela fenda bilinear, são também agora introduzidas não-linearidades devido ao acoplamento entre componentes do deslocamento. Sendo o modelo baseado na teoria de Euler-Bernoulli, o acoplamento geométrico é referente aos deslocamentos longitudinais e transversais. Considera-se no entanto, e de forma a simplificar as operações computacionais, que apenas são aplicadas cargas transversais e despreza-se ainda o efeito da inércia longitudinal da secção recta da viga, reduzindo o problema a um sistema de n equações algébricas, tantas quanto os n graus de liberdade na direcção transversal.

Os resultados obtidos são expostos na forma de representações gráficas da resposta no tempo, projecções no plano de fase, intersecções da resposta na secção de Poincaré e espectros de amplitudes. Os resultados são analisados de forma qualitativa, para regime permanente e regime transiente.

A tese está organizada em oito capítulos. O primeiro é referente à introdução agora feita, onde se procura colocar o leitor a par do trabalho desenvolvido e das suas motivações. São também apresentados alguns dos trabalhos desenvolvidos na área de estudo e que o autor considera relevantes para o enquadramento no tema. Outras referências, algumas delas não menos importantes mas de conclusões similares, podem ser consultadas no final do relatório. O segundo capítulo introduz o método dos elementos finitos tipo-p. Aborda-se a formulação do método, de uma forma simples, do ponto de vista matemático e comparam-se as taxas de convergência para o método tipo-h (convencional) e tipo-p. São ainda apreciadas as qualidades desta abordagem mais recente em relação à tradicional. O terceiro capítulo inicia-se com uma introdução ao problema da determinação das frequências naturais de vigas, pela teoria de Timoshenko. Apresenta depois a formulação do modelo de elementos finitos desenvolvido por Stojanovic et al. [42], considerando as actualizações feitas para este trabalho. O quarto capítulo inicia-se com uma introdução ao problema da determinação exacta das frequências naturais segundo a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Segue com a formulação do modelo de elementos finitos baseado na teoria de vigas com dano de Christides e Barr [14]. No quinto capítulo é apresentada a formulação da extensão da teoria de Christides e Barr para não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán. Não é derivada nenhuma solução exacta, mas é implementado um modelo de elementos finitos tipo-p do problema. No sexto capítulo, são expostos e analisados qualitativamente os resultados obtidos pelo modelo para vigas com entalhe. Não são feitas críticas detalhadas nem é feita uma análise quantitativa, pois o primeiro objectivo do trabalho é expor o comportamento dinâmico de vigas com dano. Tal atitude resulta do facto de não existir matéria experimental que comprove todos os resultados. No entanto, sempre que necessário aprofundar ou caracterizar alguma evidência, tal será sempre devidamente referenciado. São ainda apresentadas as frequências naturais obtidas pelo novo conjunto de funções de forma e analisada a sua convergência. No sétimo são apresentados os resultados obtidos pelos modelos de viga com fenda, linear e não-linear. As considerações apontadas para o Capítulo 6 são também aqui aplicáveis. Por fim o oitavo e último capítulo inicia-se com uma revisão geral da dissertação, seguida das conclusões do estudo realizado e encerra com propostas e perspectivas de trabalho futuro, incluindo quais os pontos da tese que podem ser desenvolvidos mais detalhadamente.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS TIPO-P

2.1 INTRODUÇÃO

A formulação de modelos de elementos finitos, comumente encontrada na literatura, não explicita por razões óbvias, regra geral, de forma clara a natureza do método, nem as considerações matemáticas que o sustentam. Embora o método dos elementos finitos seja baseado, na sua génese, num conceito bastante intuitivo, a discretização de um meio contínuo, a sua validação matemática é algo complexa e apresenta importantes particularidades que variam com o tipo de problema a que se propõe resolver. O Método dos Elementos Finitos é uma técnica matemática para a resolução de equações de derivadas parciais, equações para as quais nem sempre se conhecem soluções exactas. O método propõe-se a resolver este tipo de equações, que definem os problemas de valor-fronteira, de uma forma fraca. Sabe-se actualmente que a existência de soluções fracas é assente em princípios muito mais realistas do que aqueles verificados em soluções fortes. O objectivo deste capítulo não é, de todo, apresentar detalhadamente a formulação matemática do método. Pretende-se introduzir o leitor aos conceitos matemáticos mais importantes, que baseiam este útil método. Ao longo do texto são apresentadas várias referências de leitura recomendada e onde alguns dos conceitos aqui abordados são apresentados com mais detalhe. Numa primeira parte, apresenta-se a formulação geral do método dos elementos finitos e de seguida comparam-se, com base na convergência de resultados, as duas principais variações.

2.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS TIPO-P

Muitos dos problemas de valor fronteira na física, e em particular os problemas de elasticidade, traduzem-se pela seguinte equação diferencial elíptica de segunda ordem [6]:

$$-\Delta u = f \quad , em \Omega \quad (2.1)$$

associada às seguintes condições de fronteira, respectivamente de Dirichlet e de Neumann:

$$\begin{aligned}
 u &= h & , em \Gamma_D \\
 \frac{\partial u}{\partial n} &= g & , em \Gamma_N
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

onde Δ é o laplaciano unidimensional, Ω o domínio fechado do problema e Γ_D e Γ_N , respectivamente, as fronteiras de Dirichlet e de Neumann.

O problema aqui representado será interpretado no sentido *fraco* (1) e para o caso comum de $h=0$ (2), de tal modo que a solução u do problema esteja contida num espaço de funções mensuráveis, ou seja, contínuas em quase todo o domínio [26], e de valor nulo na fronteira Γ_D [6].

Multiplicando ambos os termos da equação por uma função auxiliar v ,

$$(-\Delta u)v = fv \tag{2.3}$$

e integrando no domínio e na fronteira e aplicando a *fórmula de Green*, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_N} gv ds \tag{2.4a}$$

ou, para $g=0$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} fv dx \tag{2.4b}$$

Na referência [18] é mencionado que a condição de fronteira de Neumann está de certo modo relacionada com a aplicação de cargas pontuais. Após a integração em (2.4) e para a consideração (1) feita anteriormente, é possível definir, de uma forma geral, o espaço de soluções do problema como sendo o espaço de funções mensuráveis deriváveis até à ordem $k=1$, cujas derivadas sejam também elas contínuas em quase todo o domínio. Este espaço é designado por espaço de Sobolev, $H^1(\Omega)$. Atendendo à consideração (2), define-se o subespaço $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, do conjunto de tais funções de valor nulo na fronteira.

Em relação à equação (2.4b), mais simples, o primeiro termo traduz-se na forma bilinear $B(u, v)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e o segundo termo no produto interno no espaço de Hilbert $H_0^0(\Omega)$, que se traduz no funcional linear $F(v)$ [6],[18]. O problema descrito escreve-se então na seguinte maneira:

$$B(u, v) = F(v) \quad (2.5)$$

Atendendo a definição de *forma bilinear* [26], interprete-se o problema (2.5) como a procura de uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que a igualdade seja válida para toda e qualquer função $v \in H_0^1(\Omega)$ [18].

Seja $S \subset H_0^1(\Omega)$ o subespaço de todas as soluções de elementos finitos $u_k \in H_0^1(\Omega)$. Então o problema de elementos finitos consiste em encontrar a solução $u_k \in S$ tal que,

$$B(u_k, v) = F(v) \quad (2.6)$$

seja válida para qualquer $v \in S$. [6], [18]

Defina-se \mathcal{T} como a parametrização do domínio Ω em partições disjuntas T_i , designadas por elementos, de tal forma que [6], [26]:

1. nenhum dos seus vértices P_j se encontre no interior de outro elemento;
2. a sua união determine um domínio $\Omega_D \subset \Omega$, cujos vértices na fronteira permaneçam sobre $\partial\Omega$;
3. se $u_k(T_i)$ representa a restrição de u_k em T_i , então tem-se $u_k(T_i) \in S(T_i)$.

Seja $\{\phi_j\} \in S$ um conjunto de funções suaves de valor unitário no vértice P_j e de valor nulo nos restantes vértices e fora do domínio, então o conjunto é uma base para S e toda a solução u_k pode ser representada pela seguinte combinação linear [26]:

$$u_k = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \quad (2.7)$$

A equação (2.7) representa uma discretização da solução para a qual o problema passa agora por determinar os coeficientes a_j de tal forma que (2.6) seja verdadeira. As funções ϕ_j designam-se por funções interpoladoras ou de forma e, no caso particular de $v = \{\phi_l\}$, o método é conhecido como o *Método dos Resíduos Pesados de Galerkin*.

Da introdução de (2.7) em (2.6) resulta o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 B\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j, \phi_l\right) &= F(\phi_l) \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dx &= \int_{\Omega} f \phi_l dx \\
 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N a_j \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_l}{\partial x} dx &= \int_{\Omega} f \phi_l dx
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

que é do tipo:

$$Ba = F \tag{2.9}$$

O problema modelo exposto em (2.1) e (2.2) apresenta um operador elíptico de segunda ordem pelo que, após a aplicação da *fórmula de Green* em (2.4), equivalente à integração por partes, apenas é necessário garantir continuidade (*fraca*) até às derivadas de primeira ordem, em u e v . De uma forma geral, a um operador elíptico de ordem $2k$ está associada uma forma bilinear $B(u, v)$ no espaço de Sobolev $H^k(\Omega)$. Como exemplo, tenha-se em conta o caso da flexão de uma viga de Euler-Bernoulli, apresentado num capítulo posterior, onde $2k=4$ e $k=2$, verificando-se que a matriz de rigidez é composta pelo produto das segundas derivadas das funções de forma, ou seja, $u \in H_0^2(\Omega)$ e $v \in H_0^2(\Omega)$.

Existem diferentes abordagens ao método dos elementos finitos (MEF), que se diferenciam entre si pela forma distinta como tratam o problema assintótico da convergência entre a solução aproximada, u_k , e a solução exacta, u [6]. Em comum têm o facto de se optar, regra geral, por uma aproximação polinomial de ordem p , devido ao bom compromisso entre esforço computacional e precisão dos resultados. O método convencional, também chamado de

tipo-h, tem como princípio a redução da dimensão h , referente ao máximo diâmetro de cada elemento T_i , mantendo o grau dos polinómios numa ordem baixa. Ou seja, quanto menor a dimensão de cada elemento, mais elementos existem no domínio discreto e, por consequência, mais este se aproxima do domínio contínuo, logo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u$$

Do ponto de vista teórico, o problema assintótico da convergência também pode ser justificado quando são mantidas constantes as dimensões dos subdomínios T_i e a ordem dos polinómios aproximadores tende para infinito:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} u_p = u$$

Seja \mathcal{T} a parametrização fixa do domínio Ω , já descrita, e seja ainda $S \equiv \mathcal{P}_p^{[\mathcal{T}]}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ o conjunto de todos os polinómios de grau p contínuos e deriváveis até à ordem k em Ω_D , então o problema de elementos finitos tipo-p passa por determinar $u_p \in \mathcal{P}_p^{[\mathcal{T}]}(\Omega)$, para o problema de Dirichlet, e $u_p \in \mathcal{P}_{p,0}^{[\mathcal{T}]}(\Omega)$ para o problema de Neumann, de tal forma que a igualdade (2.6) seja válida para toda e qualquer função $\{\phi_l\}$, no respectivo espaço [6].

Babuska e Szabo [6] demonstram que a taxa de convergência para o MEF tipo-p é dada por:

$$\|u - u_p\|_{1,\Omega_0} \leq C(k, \varepsilon) p^{-(k-1)+\varepsilon} \|u\|_{k,\Omega} \quad (2.10)$$

onde $u \in H_0^k(\Omega)$ é a solução exacta do problema elíptico, p o grau da aproximação polinomial, u_p a solução de elementos finitos, $k > 1$ (não necessariamente inteiro) e C uma função dependente de k e ε , para um qualquer $\varepsilon > 0$. Sendo a relação entre o número de graus de liberdade do sistema, N , e o grau da aproximação polinomial, p , dada aproximadamente por $N \approx p^2$ então a inequação (2.10) pode ser reescrita como:

$$\|u - u_p\|_{1,\Omega_0} \leq C(k, \varepsilon) N^{-(k-1)/2+\varepsilon} \|u\|_{k,\Omega} \quad (2.11)$$

A taxa de convergência para o MEF tipo-h, para uma relação entre o número de graus de liberdade, N , e o diâmetro, h , aproximadamente igual a $N \approx h^{-2}$ e uma malha quási-uniforme, ainda de acordo com a referência [6], é dada por:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega_0} \leq CN^{-\mu/2} \|u\|_{k,\Omega} \quad (2.12)$$

onde $\mu = \min(k - 1, q)$, para q igual ao grau do polinómio completo usado nos elementos.

Se forem consideradas as condições de fronteira de Neumann, o que é uma aplicação bastante comum em problemas de elasticidade, então ε pode ser considerado nulo. Verifica-se que nesse caso, a convergência na versão-p nunca será pior do que a do método convencional, quando se compara o número de graus de liberdade necessário para atingir a precisão desejada. Refira-se também que, não havendo também qualquer tipo de restrição ao número sucessivamente maior do grau polinomial da aproximação a convergência para a versão-p do MEF pode ser bastante superior. É demonstrado também que sob algumas condições particulares que são satisfeitas na prática, como por exemplo a existência de singularidades nos vértices da malha, o factor $1/2$, presente na equação (2.11), pode ser eliminado. Tal implica que, nesses casos particulares, o MEF tipo-p seja superior ao convencional MEF tipo-h, para uma malha quási-uniforme. Os autores referem ainda que para malhas refinadas de forma adequada, a convergência da versão convencional do método dos elementos finitos é superior à do tipo-p, cuja parametrização da malha é fixa.

Tal como referido anteriormente, a implementação o método dos elementos finitos está directamente dependente do tipo de abordagem feita ao problema assintótico da convergência. No MEF tipo-p, cuja principal característica é o aumento sucessivo da ordem da aproximação polinomial da solução, é conveniente que a família de polinómios disponível permita que, aquando do aumento do grau polinomial de p para $p+1$, seja possível manter o máximo de informação possível para efectuar as novas operações, sem que seja necessário refazer os cálculos referentes às aproximações de ordem mais baixa. Como tal, deve ser assegurada a propriedade hierárquica do conjunto de funções de base, ou de forma. Esta propriedade diz que as funções correspondentes à aproximação de grau p formam um subconjunto do conjunto de funções da aproximação $p+1$, ou seja, $\{\phi_j\}^p \subset \{\phi_j\}^{p+1}$. Como consequência, é também garantido que as matrizes de rigidez (e também de massa no caso dinâmico) para elementos de ordem p sejam sub-matrizes daquelas de ordem $p+1$. Uma das vantagens da implementação de funções hierárquicas no método é a possibilidade de se criar

bibliotecas de matrizes e vectores tipo pré-computados para que possam ser utilizados numa grande gama de problemas, poupando cálculos desnecessários.

Já foi referido que para *problemas* suaves a taxa de convergência da versão-p do método dos elementos finitos não é limitada por um grau polinomial fixo, nunca sendo por isso inferior. Também foi referido o caso de *problemas não-suaves* cujas singularidades se encontram nos vértices do domínio. Neste caso, a taxa de convergência da versão-p será mesmo o dobro daquela da versão tradicional, para uma malha quási-uniforme.

Atente-se agora na abordagem pelo método dos elementos finitos tipo-p a *problemas não-suaves* com singularidades internas. Uma das limitações subjacentes à análise por elementos tipo-p prende-se com o facto de estes serem dependentes de funções polinomiais, e coeficientes constantes, que se estendem em todo o seu domínio e que, por isso, não são sensíveis a descontinuidades ou variações bruscas na geometria da estrutura. Idealmente, a solução passa por uma parametrização do domínio do problema feita de modo a que as singularidades sejam “forçadas” a coincidir com vértices. De uma forma mais geral, pode-se dizer que no método dos elementos finitos tipo-p, o número de elementos e a sua disposição são acima de tudo definidos pela geometria da estrutura em análise [42]. No entanto, a um aumento de elementos corresponde sempre um aumento do custo computacional. Devido à simplicidade dos problemas em estudo nesta tese, correspondentes à vibração de vigas unidimensionais com dano lateral (fenda ou entalhe), é introduzido um conjunto de novas funções polinomiais dependentes da posição da fenda, desenvolvidas por Stojanovic et al. [42] e apresentadas nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 3

VIGAS COM ENTALHE

3.1 INTRODUÇÃO

O Capítulo 3 introduz um elemento de viga com dano, segundo o MEF tipo-p, baseado no trabalho de Stojanovic et al. [42]. O modelo é baseado na teoria de vigas de Timoshenko e o dano considerado do tipo “entalhe”, definido por duas dimensões (largura e profundidade) e caracterizado numericamente por uma redução local de massa e de rigidez. Em [42], os autores consideraram o entalhe sempre aberto e avaliaram o seu efeito no comportamento da viga, aliado à existência de não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán. O objectivo do presente capítulo desta dissertação é avaliar o estado do entalhe da viga e detectar um possível comportamento bilinear, isto é, se este abre e fecha, ou se se mantém sempre aberto. Desta forma, o modelo foi actualizado de maneira a ser capaz de determinar as posição das duas extremidades do entalhe. Por razões de simplicidade apenas foram consideradas relações deformação- deslocamento e deformação-tensão lineares.

Uma vez que a presente tese se propõe a estudar o comportamento dinâmico de vigas, segundo diferentes teorias, o Capítulo 3 inicia-se com uma introdução ao problema da determinação das frequências naturais de vibração, segundo a teoria de vigas Timoshenko, no subcapítulo 3.2. O autor considera esta introdução útil, pois a escolha da teoria de vigas influencia os valores de frequência obtidos, como se poderá observar no Capítulo 4. É um subcapítulo meramente didáctico e que pretende ajudar a clarificar as diferenças entre as duas teorias de viga utilizadas. No subcapítulo 3.3 é apresentada a formulação do modelo de elementos finitos.

3.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS PELA TEORIA DE TIMOSHENKO

A formulação apresentada neste capítulo é baseada nos trabalhos de J. Dias Rodrigues [35], L. Majkut [28], T.C. Huang [24] e Han et al. [23].

O modelo de vigas de Timoshenko é talvez a extensão mais conhecida e universalmente usada da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Em relação a esta última, introduz os efeitos de deformação devido ao corte e de rotação da secção recta, de tal forma que o ângulo de rotação

entre o eixo da viga e o eixo referencial é dado pela soma entre o ângulo $\theta(x,t)$ devido a flexão pura e o ângulo de corte $\gamma(x,t)$, também designado por distorção.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta(x,t) + \gamma(x,t) \quad (3.1)$$

e o efeito de rotação da secção recta é tido em conta pelo momento de inércia da mesma. De uma forma geral, a teoria de vigas de Timoshenko é um considerável aperfeiçoamento para a representação de vigas de espessura espessa e é de especial utilidade para casos onde a frequência de resposta é elevada e para os quais os efeitos do corte e a inércia não são desprezáveis.

As equações do movimento, acopladas, para o movimento transversal $w(x,t)$ e de rotação $\theta(x,t)$, em regime livre, são dadas por:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kAG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= 0 \\ -\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta(x,t) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde ρ é a massa volúmica, E o módulo de Young, G o módulo de corte, I o segundo momento de área da secção recta da viga, A a área da secção recta da viga e k o factor de correcção de corte, característica inerente às simplificações da teoria. Aplicando o método da separação das variáveis e assumindo como síncronos os movimentos transversais e de rotação da viga, as respostas $w(x,t)$ e $\theta(x,t)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= W(x)T(t) \\ \theta(x,t) &= \Theta(x)T(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da introdução de (3.3) em (3.2), e após organização dos termos em relação ao tempo e à coordenada espacial, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= \frac{kAG \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{d\Theta}{dx} \right)}{\rho A W(x)} \\ -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= \frac{-\left(EI \frac{d^2 \Theta}{dx^2} \right) - kAG \left(\frac{dW}{dx} - \Theta(x) \right)}{\rho I \Theta(x)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nas equações anteriores, os termos dependem cada um deles de uma variável própria. As igualdades apenas se verificam no caso de cada termo das equações ser igual a uma constante arbitrária. Seja essa constante o quadrado das frequências naturais da viga, ω^2 , então resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 \rho}{kG} W(x) - \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2 \rho}{E} - \frac{kGA}{EI} \right) \Theta(x) + \frac{kAG}{EI} \frac{\partial W}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) &= 0\end{aligned}\tag{3.5}$$

Definam-se as seguintes constantes:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\omega^2 \rho}{kG} & b &= \frac{\omega^2 \rho}{E} - \frac{kGA}{EI} \\ c &= \frac{kAG}{EI} & d &= a + b + c \\ e &= a \times b\end{aligned}\tag{3.6}$$

então, após desacoplamento das duas primeiras equações de (3.5), resulta a seguinte equação diferencial ordinária de quarta ordem que representa a problema característico da vibração transversal da viga:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + d \frac{d^2 W}{dx^2} + eW = 0\tag{3.7}$$

O polinómio característico de (3.7) é dado por:

$$r^4 + dr^2 + e = 0\tag{3.8}$$

Aplicando a mudança de variável,

$$r^2 = z$$

obtem-se a seguinte equação de segunda ordem:

$$z^2 + dz + e = 0\tag{3.9}$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - 4e} - d \\ z_2 &= - \left[\frac{1}{2} \sqrt{d^2 - 4e} + d \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.10) é possível retirar as seguintes conclusões relativamente ao sinal das raízes.

$$\begin{aligned} z_2 &< 0 \quad \forall \omega && \text{para } d^2 - 4e > 0 \quad \forall \omega \\ z_1 &< 0 && \text{para } \omega^2 > \frac{kAG}{\rho I} \\ z_1 &> 0 && \text{para } \omega^2 < \frac{kAG}{\rho I} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Verifica-se a existência de dois espectros de frequência segundo a teoria de Timoshenko. N.G. Stephen [40] conclui que, para o caso de vigas apoiadas, o segundo espectro de amplitudes deve ser ignorado, por considerar que não tem significado físico e que se trata de uma consequência indesejada da própria teoria de Timoshenko. O mesmo autor demonstra que existe uma factorização da equação de frequência para estas condições de fronteira e que a referida teoria consegue prever com exactidão as frequências naturais no primeiro espectro, que é definido por funções trigonométricas (reais), uma vez que, neste caso, o segundo espectro é definido por funções hiperbólicas (imaginárias) e não irá originar a propagação física de ondas pela estrutura. Verifica ainda que para o primeiro espectro, os resultados obtidos para os 20 primeiros modos de vibração são previstos com elevada precisão, quando comparados com aqueles obtidos pela teoria exacta. Para o segundo espectro, mostra que as frequências naturais previstas são coincidentes com os valores exactos, mas os valores obtidos não correspondem aos mesmos modos de vibração previstos por outros métodos, pelo que considera que a previsão feita no segundo espectro não é coerente.

Em relação às restantes condições de fronteira, Stephen et al. [41] verificam também a existência de um segundo espectro, ao qual apelidam de “pseudo-segundo espectro”, devido às suas características diferentes. Neste caso, os autores concluem que, embora não exista factorização da equação de frequência, para frequências acima do valor limite, ω_c , os termos hiperbólicos (imaginários) passam a trigonométricos (reais), o que na prática significa que ondas evanescentes se tornem propagáveis e se sobrepõem às restantes. A sobreposição de ondas entre ambos os “espectros” introduz um erro elevado na previsão, o que leva os autores

a considerar que se deva novamente ignorar este segundo espectro. Mais concluem que, para a teoria de Timoshenko e para condições de fronteira que não as com apoio, se deva limitar a previsão de frequências naturais para o valor máximo dado por $\omega_c = \sqrt{kAG/\rho I}$.

Desta forma, a análise de frequências aqui desenvolvida limitar-se-á ao primeiro espectro, para $z_i > 0$. Obtêm-se desta forma as seguintes raízes de r :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{z_1} & r_3 &= i\sqrt{-z_2} \\ r_2 &= -\sqrt{z_1} & r_4 &= -i\sqrt{-z_2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

A solução da equação diferencial ordinária de quarta ordem (3.7), após arranjo dos termos e aplicação da *fórmula de Euler*, é escrita da seguinte forma:

$$W(x) = A_1 \cosh(\sqrt{z_1}x) + A_2 \sinh(\sqrt{z_1}x) + A_3 \cos(\sqrt{z_2}x) + A_4 \sin(\sqrt{z_2}x) \quad (3.13)$$

onde os valores das raízes da equação característica, z_1 e z_2 , e as constantes A_1 , A_2 , A_3 e A_4 da solução são determinadas a partir das condições de fronteira do sistema. A resolução do sistema de equações resultante é deveras extensa e susceptível a erros desnecessários, para além de que apenas são previstos com precisão os valores de ω abaixo do valor limite $\omega_c = \sqrt{kAG/\rho I}$. Por esses motivos, a validação das frequências naturais do modelo de elementos finitos apresentado neste capítulo será feita com recurso ao *software* comercial ANSYS®, e serve este capítulo apenas como uma pertinente introdução ao problema da determinação das frequências naturais pela teoria de Timoshenko.

3.3 FORMULAÇÃO DO MEF TIPO-P PARA ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA TIMOSHENKO COM DANO

Este subcapítulo é largamente baseado na referência [42].

No Método dos Elementos Finitos tipo-p, o número de elementos é acima de tudo definido pela geometria da estrutura em análise. Melhores aproximações são conseguidas pela adição de graus de liberdade internos, aos quais correspondem funções de forma polinomiais de ordem superior. [42]

Neste trabalho pretende-se estudar as alterações da resposta dinâmica de vigas sujeitas à presença de um entalhe superficial numa das suas faces. O entalhe é aqui caracterizado pela redução de material da viga, introduzindo não só uma redução local de rigidez e de massa, como também uma assimetria em relação ao eixo longitudinal da viga. Esta assimetria é responsável pela existência de acoplamentos entre graus de liberdade, nomeadamente acoplamento entre deslocamentos longitudinais e rotação da secção recta da viga.

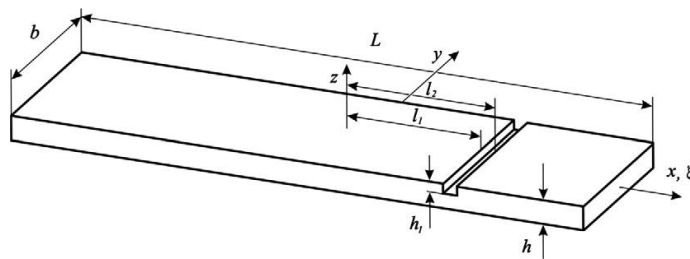


Figura 3. 1 - Viga com entalhe e dimensões. [42]

Outra propriedade importante cujo comportamento se propõe estudar é a existência de uma eventual bilinearidade do sistema, resultante da abertura e fecho do entalhe. Estudos anteriores demonstram a importância desta característica, que introduz não-linearidades na resposta do sistema. Contudo, os modelos então avaliados são desenvolvidos com uma fenda de fadiga que difere de um entalhe por ser uma descontinuidade material. Geralmente, os critérios para a abertura e fecho da fenda estão relacionados com a avaliação da curvatura do eixo-neutro da viga ou com o estado de tensão local na posição da fenda. No caso de um entalhe, os critérios anteriores não são suficientes. O modelo agora apresentado calcula, para cada instante de tempo, a posição de cada uma das extremidades do entalhe e avalia se estas se tocam ou sobrepõem, sendo que nessa altura se considera que o entalhe fecha. A mais-valia deste critério é poder-se estudar *a posteriori* se os entalhes, e não fendas de fadiga, realmente fecham, sem se imporem *a priori* restrições quanto ao seu estado.

Equações do movimento

Na figura 3.1, apresentam-se as dimensões necessárias para a caracterização da viga e do entalhe. O comprimento da viga é representado por L , a largura por b e a espessura da secção não danificada da viga por h . A profundidade do entalhe é representada por h_1 e as constantes l_1 e l_2 são as coordenadas, em relação à origem do referencial, das duas extremidades do entalhe.

Considera-se que a secção da viga é rectangular e de dimensões constantes ao longo de toda a sua extensão, com excepção para o entalhe cujas dimensões são também elas constantes. O material da viga é aqui considerado como elástico, homogéneo e isotrópico. O referencial é colocado a meio da viga e é introduzida a coordenada natural, ξ , cuja relação com a coordenada cartesiana x é $\xi = 2x/L$.

O modelo apresentado baseia-se na teoria de vigas de Timoshenko, por ser mais exacto para vigas de espessura superior e de aplicação mais abrangente do que o de Euler-Bernoulli e relativamente pouco exigente a nível computacional. Desta forma, é permitida a análise de vigas finas a moderadamente espessas cujos deslocamentos sejam, no máximo, da mesma ordem de grandeza da espessura, h , da viga. A principal vantagem da teoria de Timoshenko é introduzir o efeito do momento de inércia (rotação) da secção recta, devido a flexão, e o efeito da distorção, devido ao corte, segundo uma teoria de primeira ordem.

O campo de deslocamentos pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u^0(x, t) + z \cdot \theta^0(x, t) \\ w(x, z, t) &= w^0(x, t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $u(x, z, t)$ e $w(x, z, t)$ são as componentes do deslocamento segundo as direcções de x e z e u^0 , θ^0 e w^0 os deslocamentos no eixo neutro da viga não danificada. Na forma matricial obtém-se:

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \mathbf{Z} \mathbf{d}(x, t) \quad (3.15)$$

com,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{d}(x, t) &= \begin{Bmatrix} u^0(x, t) \\ w^0(x, t) \\ \theta^0(x, t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

A relação deformação-deslocamento adoptada é linear e as deformações longitudinal e de corte são da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, z, t) &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, z, t) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Introduzindo (3.14) nas equações anteriores, obtém-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(x, z, t) &= \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta^0}{\partial x} \\ \gamma_{xz}(x, z, t) &= \theta^0 + \frac{\partial w^0}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.18)$$

O campo de deformações pode ser escrito em representação matricial por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, z, t) = \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{u}(x, z, t) \quad (3.19)$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ é o operador diferencial,

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Substituindo (3.15) em (3.19), o campo de deformações fica definido em termos dos deslocamentos, tal como mostra a seguinte equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, z, t) = \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{Z} \mathbf{d}(x, t) \quad (3.21)$$

Em cada elemento, vector dos deslocamentos $\mathbf{d}(\xi, t)$ pode ser definido como o produto entre os deslocamentos nodais e as funções interpoladoras dos deslocamentos, ou funções de forma:

$$\mathbf{d}(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}(t) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u^0(\xi, t) \\ w^0(\xi, t) \\ \theta^0(\xi, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^u(\xi)^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^w(\xi)^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}^\theta(\xi)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^u(t) \\ \mathbf{q}^w(t) \\ \mathbf{q}^\theta(t) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{N}(\xi)$ é a matriz das funções de forma e $\mathbf{q}(t)$ o vector dos deslocamentos nodais, agrupados em relação aos deslocamentos u , w e θ . De forma a aumentar a sensibilidade do modelo à presença do entalhe, introduzem-se duas novas funções que dependem da localização do dano e, por isso, permitem reproduzir, com maior precisão, o aumento local de flexibilidade na presença do entalhe. Sejam as funções definidas por:

$$f_1^d(L, Lc, \xi) = \begin{cases} \frac{(1 + \xi)^2(6L_c + L(1 - 2\xi))}{8L}, & -1 \leq \xi \leq 2L_c/L \\ \frac{(L + 2L_c)^3(\xi - 1)^2(L - 6L_c + 2L\xi)}{8L(L - 2L_c)^3}, & 2L_c/L \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$f_2^d(L, Lc, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi^2)\left(\xi - \frac{2L_c}{L}\right), & -1 \leq \xi \leq 2L_c/L \\ \frac{(L + 2L_c)^2(\xi - 1)^2\left(\xi - \frac{2L_c}{L}\right)}{4L(L - 2L_c)^2}, & 2L_c/L \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (3.24)$$

Estas novas funções, apresentadas por Stojanovic et al. [42], são construídas pela combinação de dois polinómios de terceira ordem e verifica-se que $f_1^d(L, Lc, \xi)$ atinge o seu valor máximo na cota do entalhe e $f_2^d(L, Lc, \xi)$ a máxima derivada. Estas duas características são úteis para modelar com precisão o deslocamento e rotação no entalhe. Ambas as funções são também contínuas e apresentam valor nulo nas extremidades da viga, não influenciando as condições de fronteira impostas. São representadas na figura 3.2.

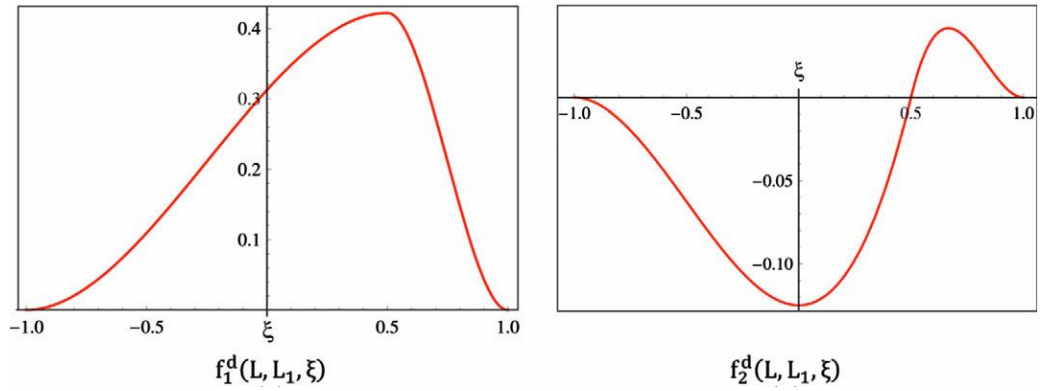
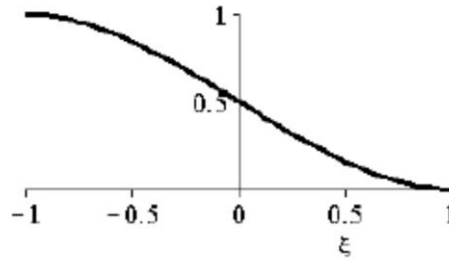


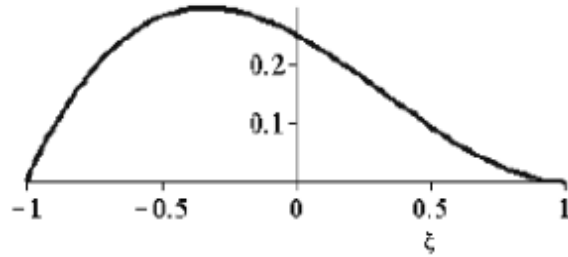
Figura 3. 2 - Representação gráfica das funções de dano. [42]

No que aos deslocamentos transversais $w^0(\xi, t)$ diz respeito, do conjunto de funções de forma fazem também parte os quatro polinómios cúbicos de Hermite (3.25)-(3.28), aqui necessários para impor as condições de fronteira na extremidade da viga.

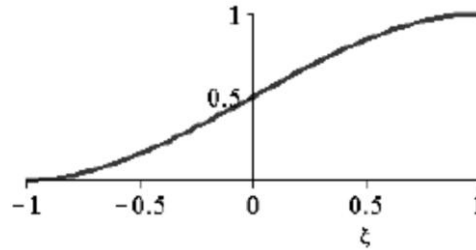
$$f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.25)$$



$$f_2(\xi) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.26)$$



$$f_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.27)$$



$$f_4(\xi) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (3.28)$$

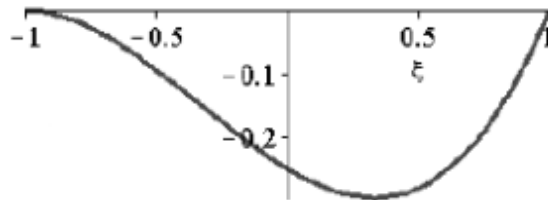


Figura 3. 3 - Polinômios cúbicos de Hermite. [42]

As funções $f_1(\xi)$ e $f_3(\xi)$ apresentam valor nulo numa das extremidades, máximo na outra (de valor unitário) e derivada nula em ambas, pelo que são ideais para interpolação dos deslocamentos transversais das vigas. As funções $f_2(\xi)$ e $f_4(\xi)$, de valor nulo nas extremidades, apresentam derivada unitária numa das extremidades e nula na outra, pelo que são adequadas para as condições de fronteira que permitam rotação.

As expressões (3.25)-(3.28) são de aplicação bastante comum no MEF, tanto para modelos baseados na teoria de Euler-Bernoulli como para aqueles baseados na de Timoshenko, pois respeitam os princípios requeridos para as funções de forma: sejam eles continuidade, ortogonalidade, partição da unidade. No entanto, são obtidas segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Não obstante, como em outros casos, serão aqui utilizadas devido à sua simplicidade.

No próximo subcapítulo, serão formulados polinómios semelhantes pela teoria de Timoshenko e estudada a convergência dos resultados.

As restantes funções de forma, de ordem superior, $r > 4$, são polinómios hierárquicos, derivados da *fórmula de Rodrigues* dos polinómios de Legendre [42], [46]. Apresentam valor e derivada nulos na extremidade e, tal como as funções de dano, são referentes a graus de liberdade internos. São formulados por:

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (3.29 \text{ a})$$

com,

$$r!! = r(r-2) \cdots (2 \text{ ou } 1), 0!! = (-1)!! = 1$$

Quanto aos deslocamentos longitudinais e de rotação, o conjunto de funções de forma é formado pelas funções de dano, $f_1^d(L, Lc, \xi)$ e $f_2^d(L, Lc, \xi)$, por um par de funções lineares,

$$g_1(\xi) = t_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \quad (3.30)$$

$$g_2(\xi) = t_2(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \quad (3.31)$$

e por um conjunto de funções hierárquicas resultantes da *fórmula de Rodrigues* do polinómio de Legendre, cuja validade é estudada por Wanmin Han et al. [46], definidos, para $r > 2$, por:

$$g_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 5)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (3.29 \text{ b})$$

O conjunto de funções de forma pode então ser representado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^u(\xi)^T &= [f_1^d(L, Lc, \xi) \ f_2^d(L, Lc, \xi) \ g_1(\xi) \ g_2(\xi) \ \dots \ g_r(\xi)] \\ \mathbf{N}^w(\xi)^T &= [f_1^d(L, Lc, \xi) \ f_2^d(L, Lc, \xi) \ f_1(\xi) \ f_2(\xi) \ \dots \ f_r(\xi)] \\ \mathbf{N}^\theta(\xi)^T &= [f_1^d(L, Lc, \xi) \ f_2^d(L, Lc, \xi) \ t_1(\xi) \ t_2(\xi) \ \dots \ t_r(\xi)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Introduzindo a discretização dos deslocamentos (3.22) em (3.21), obtém-se a seguinte expressão para o campo de deformações, em coordenadas naturais:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, z, t) = \mathcal{L} \mathbf{Z} \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}(t) \quad (3.33)$$

Na equação anterior, é muito importante não descurar a transformação de coordenadas feita e a mudança de variável implícita nesse processo. Sendo $\xi = 2x/L$, aplicando a regra da cadeia, o operador diferencial \mathcal{L} fica da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Para um material linear elástico, homogéneo e isotrópico, a relação tensão-deformação é a seguinte:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\xi, z, t) &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\xi, z, t) \\ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

com,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.36)$$

onde \mathbf{D} é a matriz de elasticidade, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ os vectores das tensões e deformações não nulas, E o módulo de elasticidade do material, G o módulo de corte, ν o coeficiente de Poisson e k o factor de correcção de corte aplicado nas teorias de primeira ordem, necessário para corrigir o princípio de que a secção da viga se mantém recta após deformação de corte.

A equação do movimento, na sua forma fraca ou integral, é obtida, neste capítulo pela aplicação do *Princípio dos Trabalhos Virtuais*:

$$\delta W_{in} + \delta W_V + \delta W_{ext} = 0 \quad (3.37)$$

onde δW_{in} , δW_V e δW_{ext} são os trabalhos virtuais realizados pelas forças de inércia, forças internas e forças externas, respectivamente.

O trabalho virtual das forças de inércia é dado por:

$$\begin{aligned}\delta W_{in} &= - \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV \\ &= - \int_V \rho [(\mathbf{N}_u \delta \mathbf{q}_u^T + z \mathbf{N}_\theta \delta \mathbf{q}_\theta^T)(\mathbf{N}_u^T \ddot{\mathbf{q}}_u + z \mathbf{N}_\theta^T \ddot{\mathbf{q}}_\theta) + (\mathbf{N}_w \delta \mathbf{q}_w^T \mathbf{N}_w^T \ddot{\mathbf{q}}_w)] \frac{L}{2} dV\end{aligned}\quad (3.38)$$

A expressão anterior pode ser escrita da forma:

$$\delta W_{in} = -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.37)$$

em que $\delta \mathbf{q}^T$ e $\ddot{\mathbf{q}}$ são, respectivamente, o vector linha dos deslocamentos generalizados virtuais e o vector coluna das acelerações e \mathbf{M} , a matriz de massa do sistema. A matriz de massa é composta por um conjunto de sub-matrizes referentes, cada uma, aos deslocamento longitudinal (\mathbf{M}_l), transversal (\mathbf{M}_b) e de rotação (\mathbf{M}_r) e ainda ao acoplamento entre os deslocamentos longitudinais e de rotação (\mathbf{M}_{lr}), devido à assimetria do eixo neutro da viga na presença do entalhe. Após integração ao longo da espessura e largura, obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_l &= \frac{\rho b L}{2} \left[h \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}_{u1} \mathbf{N}_{u1}^T d\xi + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}_{u1} \mathbf{N}_{u1}^T d\xi \right. \\ &\quad \left. + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}_{u2} \mathbf{N}_{u2}^T d\xi + h \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}_{u2} \mathbf{N}_{u2}^T d\xi \right]\end{aligned}\quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_b &= \frac{\rho b L}{2} \left[h \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}_{w1} \mathbf{N}_{w1}^T d\xi + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}_{w1} \mathbf{N}_{w1}^T d\xi \right. \\ &\quad \left. + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}_{w2} \mathbf{N}_{w2}^T d\xi + h \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}_{w2} \mathbf{N}_{w2}^T d\xi \right]\end{aligned}\quad (3.39)$$

$$\mathbf{M}_\theta = \frac{\rho b L}{2} \left[\frac{h^3}{12} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}_{\theta 1} \mathbf{N}_{\theta 1}^T d\xi + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}_{\theta 1} \mathbf{N}_{\theta 1}^T z^2 d\xi dz \right. \\ \left. + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}_{\theta 1} \mathbf{N}_{\theta 1}^T z^2 d\xi dz + \frac{h^3}{12} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}_{\theta 2} \mathbf{N}_{\theta 2}^T d\xi \right] \quad (3.40)$$

$$\mathbf{M}_{lr} = \frac{\rho b L}{2} \frac{(-hh_1)}{2} + h^2 \left[\int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}_{u1} \mathbf{N}_{\theta 1}^T d\xi + \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}_{u2} \mathbf{N}_{\theta 2}^T d\xi \right] \quad (3.41)$$

O trabalho virtual das forças internas é dado por:

$$\delta W_V = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.42)$$

Atendendo às expressões (3.33) - (3.36), o trabalho virtual das forças internas pode ser decomposto na soma dos trabalhos virtuais das forças internas longitudinais e de corte, da seguinte forma:

$$\delta W_V = \delta W_{\varepsilon_{xx}} + \delta W_{\tau_{xz}} \\ = - \int_V \left(\frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial \xi} \delta \mathbf{q}_u^T + z \frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial \xi} \delta \mathbf{q}_\theta^T \right) E \left(\frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial \xi} \mathbf{q}_u + z \frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_\theta}{\partial \xi} \delta \mathbf{q}_\theta^T \right) dV \\ - \int_V \left(\mathbf{N}_\theta \delta \mathbf{q}_\theta^T + \frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \xi} \delta \mathbf{q}_w^T \right) G \left(\mathbf{N}_\theta^T \mathbf{q}_\theta + \frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \xi} \mathbf{q}_w \right) dV \quad (3.43)$$

$$= -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{K}^\varepsilon \ddot{\mathbf{q}} - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K}^\gamma \ddot{\mathbf{q}}$$

onde \mathbf{K}^ε e \mathbf{K}^γ são as matrizes de rigidez de membrana-flexão e de corte, respectivamente. Tal como a matriz de massa, também estas são compostas por um conjunto de sub-matrizes referentes à rigidez de membrana (\mathbf{K}_l^ε), de flexão (\mathbf{K}_b^ε), de corte (\mathbf{K}^γ) e ao acoplamento entre deslocamentos longitudinais e rotação ($\mathbf{K}_{lr}^\varepsilon$), devido à assimetria do eixo neutro da viga na presença do entalhe. Da integração de (3.43) ao longo das direcções de espessura e largura, resulta:

$$\mathbf{K}_l^\varepsilon = \frac{2Eb}{L} \left[h \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} d\xi + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} d\xi \right. \\ \left. + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} d\xi + h \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (3.44)$$

$$\mathbf{K}_b^\varepsilon = \frac{2Eb}{L} \left[\frac{h^3}{12} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 1}^T}{\partial \xi} d\xi \right. \\ \left. + \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 1}^T}{\partial \xi} z^2 d\xi dz \right. \\ \left. + \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 2}^T}{\partial \xi} z^2 d\xi dz + \frac{h^3}{12} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (3.45)$$

$$\mathbf{K}^{\gamma 11} = \frac{2\lambda Gb}{L} \left[h \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} d\xi + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} d\xi \right. \\ \left. + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} d\xi + h \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (3.46)$$

$$\mathbf{K}^{\gamma 12} = \lambda Gb \left[h \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi} \mathbf{N}_{\theta 1}^T d\xi + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi} \mathbf{N}_{\theta 1}^T d\xi \right. \\ \left. + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi} \mathbf{N}_{\theta 2}^T d\xi + h \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi} \mathbf{N}_{\theta 2}^T d\xi \right] \quad (3.47)$$

$$\mathbf{K}^{\gamma 22} = \frac{\lambda GbL}{2} \left[h \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}_{\theta 1} \mathbf{N}_{\theta 1}^T d\xi + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}_{\theta 1} \mathbf{N}_{\theta 1}^T d\xi \right. \\ \left. + (h - h_1) \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}_{\theta 2} \mathbf{N}_{\theta 2}^T d\xi + h \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}_{\theta 2} \mathbf{N}_{\theta 2}^T d\xi \right] \quad (3.48)$$

$$\mathbf{K}_{lr}^\varepsilon = \frac{2Eb}{L} \frac{(-hh_1) + h^2}{2} \left[\int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 1}^T}{\partial \xi} d\xi + \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{\theta 2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (3.49)$$

Determinadas as matrizes de rigidez e de massa, defina-se agora a matriz de amortecimento do sistema. No MEF um dos tipos de amortecimento mais comuns é o *amortecimento viscoso*, pois pode ser utilizado para qualquer tipo de excitação. No caso presente, aplica-se o amortecimento proporcional de Rayleigh, definido por:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.50)$$

onde α é a constante de proporcionalidade de massa e β a constante de proporcionalidade de rigidez. O conceito de amortecimento proporcional por si só é bastante redutor, mas ainda assim permite que o sistema mantenha os seus modos de vibração reais *se e só se* for respeitada a condição de Caughey [1].

Caughey propôs que a condição *necessária e suficiente* para a existência de modos de vibração reais será garantir que o produto de matrizes $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ possa ser expresso numa série de potências do produto $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ [1]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{j=0}^{N-1} a_j (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^j \quad (3.51)$$

para a qual (3.50) corresponde aos dois primeiros termos da expansão, com $a_0=\alpha$ e $a_1=\beta$. A vantagem do uso do amortecimento proporcional está no facto de na base modal, garantida a condição (3.51), a matriz de amortecimento, \mathbf{C} , ser diagonal, pois o amortecimento proporcional é linear e o problema característico não apresenta raízes complexas, que introduziriam acoplamentos entre as velocidades generalizadas. A transformação de (3.50) para a base modal é feita da seguinte forma [35]:

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{C} \Phi &= \alpha \Phi^T \mathbf{M} \Phi + \beta \Phi^T \mathbf{K} \Phi \\ &= \alpha \mathbf{I} + \beta \Omega^2 \\ &= [\alpha + \beta \Omega^2] \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde Φ é a matriz de transformação modal.

Na base modal, todas as equações do movimento se apresentam então desacopladas, pelo que para cada grau de liberdade, as n equações do movimento são dadas por [45]:

$$\ddot{\eta}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = Q_n \quad (3.53)$$

onde ξ_n é a razão de amortecimento, do n-ésimo modo de vibração, característica do material. De (3.52) e (3.53) é garantida a seguinte igualdade:

$$2\xi_n\omega_n = \alpha + \beta\omega_n^2 \quad (3.54)$$

Para determinar as duas constantes de proporcionalidade, resolve-se o seguinte sistema de equações algébricas, para os dois primeiros modos de vibração:

$$\begin{cases} \alpha + \beta\omega_1^2 = 2\xi_1\omega_1 \\ \alpha + \beta\omega_2^2 = 2\xi_2\omega_2 \end{cases} \quad (3.55)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são as razões de amortecimento dos primeiro e segundo modos de vibração, respectivamente. Determinados os valores das duas constantes de proporcionalidade torna-se então possível determinar o amortecimento modal para os restantes modos de vibração através da expressão dada por (3.54). Naturalmente este é um processo semi-empírico, pois é necessário conhecer previamente a razão de amortecimento para os primeiros dois modos de vibração do sistema. Tal pode ser feito com recurso a dados experimentais. No entanto, este é um processo, acima de tudo, matematicamente conveniente [45].

Para o caso de se pretender a solução directa da equação do movimento do sistema, introduza-se directamente os valores calculados de α e β na equação (3.50), de modo a se obter uma matriz de amortecimento proporcional. De uma forma geral é aceite que o amortecimento proporcional de massa representa o efeito da dissipação de energia por fricção e o amortecimento proporcional de rigidez o efeito do amortecimento interno material. [45]

No caso de estudo, uma vez que os deslocamentos medidos são de muito pequena amplitude, apenas se considera o amortecimento proporcional de rigidez, logo $\alpha=0$ e a partir da primeira equação de (3.55):

$$\beta = \frac{2\xi_1}{\omega_1} \quad (3.56)$$

É importante ressaltar que o amortecimento obtido é apenas baseado no primeiro modo de vibração.

Do princípio dos trabalhos virtuais (3.37) resulta a seguinte equação diferencial do movimento, considerando o amortecimento de Rayleigh:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_l & 0 & \mathbf{M}_{lr} \\ 0 & \mathbf{M}_b & 0 \\ \mathbf{M}_{lr} & 0 & \mathbf{M}_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_w \\ \ddot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \mathbf{K}_l^\varepsilon & 0 & \mathbf{K}_{lr}^\varepsilon \\ 0 & \mathbf{K}^{\gamma 11} & \mathbf{K}^{\gamma 12} \\ \mathbf{K}_{lr}^{\varepsilon T} & \mathbf{K}^{\gamma 12 T} & \mathbf{K}_b^\varepsilon + \mathbf{K}^{\gamma 22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\mathbf{q}}_w \\ \dot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_l^\varepsilon & 0 & \mathbf{K}_{lr}^\varepsilon \\ 0 & \mathbf{K}^{\gamma 11} & \mathbf{K}^{\gamma 12} \\ \mathbf{K}_{lr}^{\varepsilon T} & \mathbf{K}^{\gamma 12 T} & \mathbf{K}_b^\varepsilon + \mathbf{K}^{\gamma 22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_u^{ext} \\ F_w^{ext} \\ F_\theta^{ext} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

3.4 FORMULAÇÃO DE UM CONJUNTO DE FUNÇÕES DE FORMA HERMITEANAS, SEGUNDO A TEORIA DE TIMOSHENKO

No capítulo anterior, foi introduzido um conjunto de funções de forma hermiteanas, para atribuição das condições de fronteira e cuja utilização é bastante comum devido à simplicidade e aos bons resultados que apresentam. No entanto, são baseadas na teoria de vigas de Euler-Bernoulli.

Neste capítulo, é introduzido um conjunto de novas funções de forma hermiteanas, derivadas por A. Bazoune et al. [8], segundo a teoria de Timoshenko, e avaliada a sua convergência no que respeita às frequências naturais. Este conjunto de funções foi formulado para aplicação em elementos de viga tridimensionais. Pretende-se agora verificar se a sua aplicação num modelo unidimensional traz vantagens significativas ao nível do custo computacional, no sentido de ser obtida convergência para um número inferior de graus de liberdade. Os polinómios apresentados nesta tese foram reformulados, a partir do mesmo processo utilizado pelos autores, pois os referenciais adoptados nos dois trabalhos não coincidem.

Principie-se por definir as variáveis necessárias à resolução do problema. Seja o campo de deslocamentos da viga definido por:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u^0(x, t) + z \theta^0(x, t) \\ w(x, t) = w^0(x, t) \end{cases} \tag{3.58}$$

onde θ^0 é dado por:

$$\theta^0(x, t) = -\frac{\partial w^0}{\partial x} + \gamma_{xz} \tag{3.59}$$

com γ_{xz} de valor constante e igual a γ_0 .

O deslocamento vertical da viga é aqui aproximado por um polinómio incompleto de terceira ordem, da seguinte forma:

$$w^0(x, t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.60)$$

de tal modo que no final as funções de forma pretendidas sejam também elas cúbicas. Derivando a expressão anterior, em ordem a x , e introduzindo em (3.59), obtém-se:

$$\theta^0(x, t) = -(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) + \gamma_0 \quad (3.61)$$

Para determinar a constante γ_0 , atente-se na seguinte relação entre *Momento Flector* e *Esforço Transverso*:

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = Q_z \quad (3.62)$$

O *Momento Flector* resultante de flexão pura é dado pela seguinte expressão:

$$M_y = -EI \frac{\partial \theta^0}{\partial x} \quad (3.63)$$

Introduzindo na expressão anterior a derivada de $\theta^0(x, t)$ segundo x , obtém-se:

$$M_y(x) = EI(2a_2 + 6a_3x) \quad (3.64)$$

Finalmente, derivando também (3.64), segundo x , resulta:

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} = EI6a_3 \quad (3.65)$$

O esforço transversal é definido da seguinte forma:

$$Q_z = \lambda GA\gamma_0 \quad (3.66)$$

Da igualdade (3.62), é agora possível determinar o valor da constante γ_0 .

$$\gamma_0 = \frac{6EI}{\lambda GA} a_3 \quad (3.68)$$

Por simplicidade, defina-se o termo constante $c=(6EI)/(\lambda GA)$ por *constante de corte*, de tal forma que:

$$\gamma_0 = c \cdot a_3 \quad (3.69)$$

$\theta^0(x, t)$ fica assim definido da seguinte forma:

$$\theta^0(x, t) = -(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) + c \cdot a_3 \quad (3.70)$$

Definidas as variáveis necessárias à resolução do problema, apresenta-se de seguida as condições de fronteira do sistema. Seja,

$$\begin{aligned} w^0(-L/2) &= q_{w1} & ; & & w^0(L/2) &= q_{w2} \\ \theta^0(-L/2) &= q_{\theta1} & ; & & \theta^0(L/2) &= q_{\theta2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

um conjunto de condições de fronteira geométricas genéricas, aplicadas em ambas as extremidades da viga, segundo deslocamentos transversais e de rotação. Substituindo (3.60) e (3.70), resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \left(\frac{-L}{2} \right) + a_2 \left(\frac{-L}{2} \right)^2 + a_3 \left(\frac{-L}{2} \right)^3 = q_{w1} \\ - \left(a_1 + 2a_2 \left(\frac{-L}{2} \right) + 3a_3 \left(\frac{-L}{2} \right)^2 \right) + c \cdot a_3 = q_{\theta1} \\ a_0 + a_1 \left(\frac{L}{2} \right) + a_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 + a_3 \left(\frac{L}{2} \right)^3 = q_{w2} \\ - \left(a_1 + 2a_2 \left(\frac{L}{2} \right) + 3a_3 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) + c \cdot a_3 = q_{\theta2} \end{cases} \quad (3.72)$$

Resolvendo o sistema anterior em ordem a a_0, a_1, a_2 e a_3 e colocando em evidência $q_{w1}, q_{w2}, q_{\theta1}$ e $q_{\theta2}$, obtém-se:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} q_{w1} - \frac{L}{8} q_{\theta1} + \frac{1}{2} q_{w2} + \frac{L}{8} q_{\theta2} \\ a_1 = \frac{-6L^2 + 8c}{4L(L^2 - 2c)} q_{w1} + \frac{L^3}{4L(L^2 - 2c)} q_{\theta1} + \frac{6L^2 - 8c}{4L(L^2 - 2c)} q_{w2} + \frac{L^3}{4L(L^2 - 2c)} q_{\theta2} \\ a_2 = \frac{1}{2L} q_{\theta1} - \frac{1}{2L} q_{\theta2} \\ a_3 = \frac{2}{L(L^2 - 2c)} q_{w1} - \frac{1}{L^2 - 2c} q_{\theta1} - \frac{2}{L(L^2 - 2c)} q_{w2} - \frac{1}{L^2 - 2c} q_{\theta2} \end{cases} \quad (3.73)$$

Introduzindo os valores de a_0 , a_1 , a_2 e a_3 na equação (3.60) vem:

$$\begin{aligned}
 w^0(x, t) = & \left[\frac{1}{2} + \frac{-6L^2 + 8c}{4L(L^2 - 2c)}x + \frac{2}{L(L^2 - 2c)}x^3 \right] q_{w1} \\
 & + \left[-\frac{L}{8} + \frac{L^3}{4L(L^2 - 2c)} + \frac{1}{2L}x^2 - \frac{1}{L^2 - 2c}x^3 \right] q_{\theta1} \\
 & + \left[\frac{1}{2} + \frac{6L^2 - 8c}{4L(L^2 - 2c)}x - \frac{2}{L(L^2 - 2c)}x^3 \right] q_{w2} \\
 & + \left[\frac{L}{8} - \frac{L^3}{4L(L^2 - 2c)} - \frac{1}{2L}x^2 - \frac{1}{L^2 + 2c}x^3 \right] q_{\theta2}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

A equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$w^0(x, t) = N_w^1 q_{w1} + N_w^2 q_{\theta1} + N_w^3 q_{w2} + N_w^4 q_{\theta2} \tag{3.75}$$

onde N_w^1 , N_w^2 , N_w^3 e N_w^4 são as funções de forma correspondes a cada condição de fronteira e são definidas por:

$$\begin{aligned}
 N_w^1 &= \frac{1}{2} + \frac{-6L^2 + 8c}{4L(L^2 - 2c)}x + \frac{2}{L(L^2 - 2c)}x^3 \\
 N_w^2 &= -\frac{L}{8} + \frac{L^3}{4L(L^2 - 2c)}x + \frac{1}{2L}x^2 - \frac{1}{L^2 - 2c}x^3 \\
 N_w^3 &= \frac{1}{2} + \frac{6L^2 - 8c}{4L(L^2 - 2c)}x - \frac{2}{L(L^2 - 2c)}x^3 \\
 N_w^4 &= \frac{L}{8} + \frac{L^3}{4L(L^2 - 2c)}x - \frac{1}{2L}x^2 - \frac{1}{L^2 - 2c}x^3
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Finalmente, aplicando a seguinte mudança de variável, na transformação de coordenadas globais para coordenadas locais (ou adimensionais),

$$\xi = \frac{2}{L}x$$

as funções reescrevem-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 N_w^1 &= \frac{1}{2} + \frac{-6L^2 + 8c}{8(L^2 - 2c)}\xi + \frac{L^2}{4(L^2 - 2c)}\xi^3 \\
 N_w^2 &= \frac{L}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{L^2}{(L^2 - 2c)}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4} \frac{L^2}{(L^2 - 2c)}\xi^3 \right) \\
 N_w^3 &= \frac{1}{2} + \frac{6L^2 - 8c}{8(L^2 - 2c)}\xi - \frac{L^2}{4(L^2 - 2c)}\xi^3 \\
 N_w^4 &= \frac{L}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{L^2}{(L^2 - 2c)}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4} \frac{L^2}{(L^2 - 2c)}\xi^3 \right)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Tal como esperado, foi obtido um conjunto de polinómios cúbicos. De notar que as funções hermiteanas apresentadas no capítulo anterior são um caso particular das agora calculadas, bastando para isso eliminar a constante de corte c .

3.5 FECHO DO CAPÍTULO

Neste capítulo começou-se por introduzir o problema da determinação das frequências naturais pela teoria de vigas de Timoshenko. Mostrou-se que existe um valor limite para as frequências naturais, $\omega_c = \sqrt{kAG/\rho I}$, o qual define a existência de dois espectros de amplitudes. N.G. Stephen [40] e N.G. Stephen et al. [41] concluem nos seus trabalhos que o segundo espectro deve ser ignorado por considerarem que se trata de um inconveniente da própria teoria de Timoshenko, indicando mesmo referências que indicam que tal espectro não terá significado físico. No caso de vigas apoiadas, para o qual demonstram que existe uma factorização da equação de frequências, concluem que o primeiro espectro prevê com elevada exactidão os valores das frequências naturais de vibração, mesmo para valores muito mais elevados do que ω_c , pois não existirá uma sobreposição entre as ondas do primeiro e segundo espectros. Para as restantes condições de fronteira, para as quais indicam não existir uma factorização da equação de frequências, os autores referem que acima do valor limite, ω_c , se verifica a propagação de ondas outrora evanescentes e que introduzem erros na previsão das frequências naturais. Posteriormente, no subcapítulo 3.3, foi introduzido o modelo de elementos finitos tipo-p, baseado no trabalho de Stojanovic et al. [42]. O modelo apresentado apresenta contudo relações deformação-tensão e deformação-deslocamento lineares. É válido para vigas

elásticas e isotrópicas e foi considerado amortecimento proporcional de rigidez. De forma a atenuar a baixa sensibilidade do método a singularidades internas, no domínio, foram também consideradas duas funções cúbicas dependentes da localização do dano e derivadas na referência [42]. No final foram derivadas novas funções hermiteanas, segundo a teoria de Timoshenko, pelo procedimento de A. Bazoune et al. [8], adaptadas a um problema unidimensional e ao referencial adoptado nesta tese.

CAPÍTULO 4

VIGAS COM FENDA BILINEAR

4.1 INTRODUÇÃO

O Capítulo 4 introduz um elemento de viga com dano, segundo o MEF tipo-p, baseado na teoria de Christides e Barr [14]. O modelo é baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e o dano considerado como uma fenda bilinear, definida por uma dimensão, a profundidade, e caracterizado numericamente por uma redução de rigidez, apenas. O objectivo deste capítulo é apresentar um modelo capaz de simular numericamente a dinâmica não-linear de uma viga com fenda. O modelo apresentado considera relações deformação-tensão e deformação-deslocamento lineares e está apto para vigas elásticas e isotrópicas.

Tal como o capítulo anterior, o Capítulo 4 inicia-se com uma introdução ao problema da determinação das frequências naturais de vibração, segundo a teoria de vigas Euler-Bernoulli, no subcapítulo 4.2. Como se poderá concluir, existem diferenças claras em relação ao verificado no subcapítulo 3.2. Novamente, considera-se uma secção meramente didáctica e que pretende ajudar a clarificar as diferenças entre as duas teorias de viga utilizadas. No subcapítulo 4.3 é apresentada a formulação do modelo de elementos finitos.

4.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS PELA TEORIA DE EULER-BERNOULLI

A formulação apresentada é baseada no trabalho de J. Dias Rodrigues [35].

O modelo de Euler-Bernoulli, também conhecido por “Teoria das Vigas Finas”, foi a primeira teoria de vigas a prever com algum grau de exactidão os deslocamentos em vigas sujeitas a esforços de flexão e aplica-se a vigas cujo comprimento é muito superior às dimensões da secção recta.

A aplicação do modelo exige que sejam assumidas algumas simplificações relativamente ao comportamento da viga quando deformada. Considera-se que a secção recta da viga se mantém normal ao eixo neutro após flexão, de tal modo que são desprezados a rotação (inércia) da secção recta e os efeitos da distorção devido ao corte. Por esta razão, a

teoria de Euler-Bernoulli tende a subestimar a deformação e, como consequência, a sobrestimar as frequências naturais de vibração.

A equação diferencial do movimento de uma viga de Euler-Bernoulli, em regime livre e de secção constante, é dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

Seja o deslocamento da viga no tempo um movimento síncrono, então a resposta $w(x, t)$, solução da equação diferencial de derivadas parciais (4.1), pode ser escrita com base no método da separação de variáveis da seguinte forma:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (4.2)$$

onde $W(x)$ representa a disposição da viga no espaço e $T(t)$ caracteriza o seu movimento no tempo. Da derivação de (4.2) em ordem a x e a t resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} &= \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} T(t) \\ \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} &= W(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

e introduzindo as soluções anteriores na equação do movimento obtém-se, após arranjo dos termos:

$$\frac{EI}{\rho A W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

Na equação anterior, os dois termos são de natureza diferente, e como tal dependem cada um deles de uma variável própria. Desta forma, a igualdade (4.4) apenas é assegurada no caso de ambos os termos serem iguais a uma constante arbitrária. Seja essa constante igual ao quadrado das frequências naturais do sistema, ω^2 , de tal forma que:

$$\begin{aligned} \frac{EI}{\rho A W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} &= \omega^2 \\ \text{e} \\ - \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= \omega^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Escreva-se a primeira equação de (4.5), da seguinte forma:

$$EI \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \omega^2 \rho A W(x) = 0 \quad (4.6)$$

A equação (4.6) representa o problema característico do problema. As soluções $W(x)$ que verificam a equação do movimento e as condições de fronteira são as suas funções características e, neste caso particular, as formas naturais do sistema. A equação (4.6) admite ainda soluções não nulas de ω^2 que representam os valores característicos do problema. Dividindo ambos os termos da equação por EI e aplicando a seguinte mudança de variável,

$$\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}$$

obtem-se:

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (4.7)$$

O polinómio característico de (4.7) é:

$$r^4 - \beta^4 = 0 \quad (4.8)$$

cujas raízes são:

$$\begin{cases} r_1 = \beta \\ r_2 = -\beta \end{cases} \quad \begin{cases} r_3 = i\beta \\ r_4 = -i\beta \end{cases} \quad (4.9)$$

Procurando uma solução $w(x)$ para a equação diferencial ordinária de 4ª ordem (4.7) do tipo:

$$W(x) = C e^{rx} \quad (4.10)$$

resulta, após substituição r pelas raízes do polinómio característico e conveniente aplicação da *fórmula de Euler*, a seguinte combinação de exponenciais:

$$W(x) = A_1 \cosh(\beta x) + A_2 \sinh(\beta x) + A_3 \cos(\beta x) + A_4 \sin(\beta x) \quad (4.11)$$

onde os valores das raízes da equação característica β e as constantes A_1, A_2, A_3 e A_4 da solução são determinadas a partir das condições de fronteira do sistema. Determinado o valor de β , as

frequências naturais são facilmente calculadas, tendo em conta a mudança de variável anteriormente feita, da seguinte forma:

$$\omega = (\beta \ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \quad (4.12)$$

Os valores para o produto $\beta \ell$, que naturalmente variam consoante a condição de fronteira e o modo de vibração, são conhecidos e tabelados e usados aqui para o cálculo das frequências naturais, como forma de validação do modelo de elementos finitos apresentado neste capítulo. A tabela seguinte apresenta os valores das raízes para vigas encastradas e duplamente encastradas.

Tabela 4. 1 – Valores de $\beta \ell$ para as condições de fronteira de encastramento e duplo encastramento [35]

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	n ^{mo} Modo
Duplamente encastrada	4,7300	7,8532	10,9956	14,1371	17,2787	$\frac{(2n+1)\pi}{2}$
Encastrada-Livre	1,8751	4,6941	7,8548	10,9955	14,1372	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$

4.3 FORMULAÇÃO DO MEF TIPO-P PARA ANÁLISE DINÂMICA DE UMA VIGA EULER-BERNOULLI COM DANO, PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS DE GALERKIN

No subcapítulo que agora se inicia, pretende-se estudar as alterações da resposta dinâmica de vigas sujeitas à presença de uma fenda superficial numa das suas faces. É desenvolvido um elemento de viga com base na *teoria unidimensional de vigas Euler-Bernoulli com fendas* de Christides e Barr [14]. Contrariamente ao modelo apresentado no capítulo anterior, o dano é agora representado por uma fenda, por exemplo de fadiga, caracterizada apenas por uma dimensão, a sua profundidade. Esta idealização permite desde já antever que o efeito do dano se limitará unicamente a uma redução da rigidez do sistema, pois não é considerada nenhuma redução local de material. Permite também impor que a fenda tenha um *comportamento não-linear*, fechando e abrindo ao longo do tempo. É intuitivo pensar que quando as duas faces da fenda estão comprimidas uma contra a outra, esta se possa considerar

como fechada e a viga se comporta aproximadamente como se estivesse intacta e que, quando a tensão de flexão é de tracção, as faces se afastam e a fenda abre. Diz-se aproximadamente, pois na realidade não existirá transmissão dos esforços de corte entre as duas faces da fenda, quando estas são sujeitas a tensões de compressão. De forma a simplificar o modelo, assume-se de forma plausível que a transição de estado é abrupta e não gradual, isto é, ou a fenda está totalmente aberta ou totalmente fechada. O sistema passa a ser *bilinear* e são esperadas interessantes particularidades na resposta do sistema.

A figura 4.1 apresenta de forma sucinta as principais dimensões da viga, necessárias para o desenvolvimento do modelo.

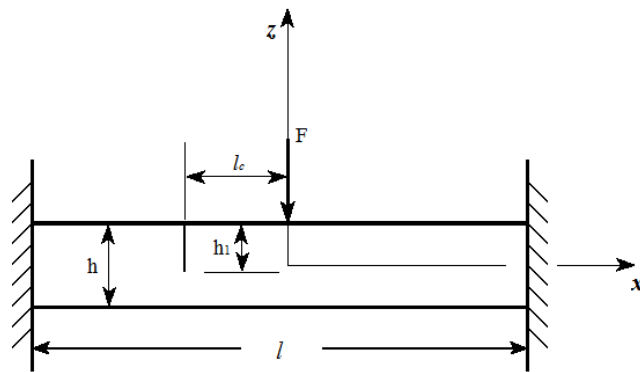


Figura 4. 1 - Dimensões de uma viga com fenda duplamente encastrada

A teoria de Christides e Barr tem por base alguns princípios simplificadores importantes. Apenas são considerados deslocamentos transversais. Assume-se que apenas os campos de tensões e deformações são afectados directamente pela presença e não o campo de deslocamentos. Tendo por base a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, a distribuição de tensões longitudinais, longe da fenda, é considerada linear. Na secção da fenda, assume-se que essa distribuição é também ela linear, embora os autores afirmem desconhecer a precisão de tal afirmação, de tal modo que apenas a magnitude da tensão é alterada, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -zT(x, t) & , \text{sem fenda} \\ \sigma_{xx} = [-z + f(x, z,)]T(x, t) & , \text{com fenda} \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $T(x, t)$ é a função que define a relação entre os deslocamentos e as tensões.

$$\begin{cases} T(x, t) = E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & , \text{sem fenda} \\ T(x, t) = EQ(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & , \text{com fenda} \end{cases} \quad (4.14)$$

Assume-se também que o momento flector suportado pela secção da fenda é igual ao suportado pela secção intacta e que σ_{xx} é máxima na posição da fenda e que tende para o seu valor nominal, previsto pela teoria de vigas base, numa posição afastada. Relativamente a este último ponto, os autores evocam o *Princípio de Saint Venant*. É conhecido que muitas das soluções analíticas resultantes da aplicação deste princípio são exponenciais, de modo que o mesmo é também assumido para as tensões normais [14]. Um princípio é contudo aqui relaxado. Na sua teoria, os autores consideram a existência de uma par de fendas iguais e opostas para que não sejam introduzidas assimetrias no eixo neutro, nem acoplamentos entre deslocamentos daí resultantes, tal como ocorrem no capítulo anterior. Neste capítulo, apenas se considera a existência de dano numa das faces da viga sem que isso afecte, no entanto, a simetria do eixo neutro. Esta simplificação é validada pelos resultados apresentados por Sinha et al. [39].

Christides e Barr [14] apresentam a seguinte equação diferencial do movimento, para uma viga de Euler-Bernoulli com dano e de secção rectangular.

$$EIQ(x)\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2EI\frac{\partial Q(x)}{\partial x}\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} + EI\frac{\partial^2 Q(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.15)$$

Em (4.15), $w(x,t)$ representa os deslocamentos na direcção transversal e $Q(x)$ uma função modeladora de rigidez na proximidade da fenda, definida da seguinte forma:

$$Q(x) = \frac{1}{1 + C e^{\left(\frac{-2\alpha}{h}\left|x - \frac{l}{2}\right|\right)}} \quad (4.16)$$

onde, de acordo com a figura 4.1, l é o comprimento da viga, h a espessura da viga, α uma constante experimental definida pelos autores e de valor igual a 0.667. A variável C é uma razão entre os segundos momentos de área das secções intacta e danificada:

$$C = \frac{I - I_r}{I_r} \quad (4.17)$$

com I_r sendo o segundo momento de área da secção reduzida na localização da fenda.

A equação diferencial apresentada é a *forma forte* da equação do movimento do sistema. Este tipo de equações é de difícil resolução e requer uma elevada continuidade do campo de variáveis dependentes (neste caso o deslocamento transversal, w). Qualquer que seja

a função que defina $w(x,t)$, esta tem de ser derivável, pelo menos, até à ordem da equação de derivadas parciais do sistema.

Contrariamente, a *forma fraca (ou integral)* de uma equação diferencial exige uma continuidade inferior das variáveis dependentes. Quando discretizado de forma conveniente, este tipo de formulação origina um conjunto de sistemas de equações algébricas de fácil resolução.

Seja,

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (4.18)$$

a solução aproximada da equação do movimento sob a forma de um polinómio de grau n , ainda por determinar. A aproximação efectuada introduz naturalmente um erro na resposta do sistema, de tal forma a que a igualdade de (4.15) já não é válida e passa a ter um valor residual. O objectivo será encontrar a solução que minimize esse erro. Aplicando o *Método dos Resíduos Pesados* é procurada uma solução sob a forma de um integral pesado, introduzido no Capítulo 2, que satisfaça a seguinte igualdade,

$$\int_{\Omega} P \cdot A(w) d\Omega = 0 \quad (4.19)$$

onde P é o conjunto de funções de peso, ou de base, e $A(w)$ o resíduo resultante da aproximação. De uma forma simples, a equação (4.19) obriga a que a “soma ponderada” de todos os resíduos, ao longo de um domínio contínuo, seja nula [47] - [48]. De forma a simplificar os cálculos a seguir apresentados, defina-se:

$$R(x) = EI_{yy}Q(x) \quad (4.20)$$

como sendo a rigidez de flexão modificada pela existência de uma fenda.

O integral de (4.15) fica definido da seguinte forma, considerando a possível existência de solicitações externas, sob a forma de carga pontual ou distribuída:

$$\int_{-L/2}^{L/2} N(x) \left(\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + R(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - F - F_0 \delta^*(x - x_0) \right) dx = 0 \quad (4.21)$$

A integração por partes permite reduzir a ordem das derivadas parciais a integrar. Sendo o problema em causa um problema de elasticidade é de todo conveniente que a integração se restrinja a termos de segunda ordem correspondentes à rigidez do sistema. Aplicando este princípio a cada uma das parcelas de (4.21), obtém-se:

1ª Parcela

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} NR \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx = \\
 & = \left[NR \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} N \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial N}{\partial x} R \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx \\
 & = \left[NR \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{-L/2}^{L/2} - \left(\left[N \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - \\
 & - \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) \\
 & = \left[NR \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left(N \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} R \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{-L/2}^{L/2} + \int_{-L/2}^{L/2} \left(N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} R \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Da expressão anterior é o possível identificar os seguintes termos referentes ao esforço interno de corte, T , ao momento flector, M , e à rigidez de flexão, K ,

$$\begin{aligned}
 T_1(x) &= \left[NR \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 M_1(x) &= \left[- \left(N \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} R \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 K_1(x) &= \int_{-L/2}^{L/2} \left(N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} R \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

2ª Parcela

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{-L/2}^{L/2} N \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx = \\
 & = 2 \left(N \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_{-L/2}^{L/2} N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) \\
 & = 2N \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left(N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
 M_2(x) &= \left[2N \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 K_2(x) &= - \int_{-L/2}^{L/2} 2 \left(N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

3ª Parcela

$$K_3(x) = \int_{-L/2}^{L/2} N \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \tag{4.26}$$

Após a soma de todas as parcelas, obtém-se

$$\begin{aligned}
 T(x) &= \left[NR \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 M(x) &= \left[\left(N \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x} R \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 K(x) &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} R \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Atendendo à definição de $Q(x)$, verifica-se que os termos de (4.27) tendem para os da tradicional viga de Euler-Bernoulli, para pontos afastados da posição da fenda. Do integral (4.21) é ainda possível definir as seguintes componentes da equação do movimento,

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_{-L/2}^{L/2} N \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx \\ F_{dist}(x) &= \int_{-L/2}^{L/2} N \cdot F dx \\ F_c(x) &= \int_{-L/2}^{L/2} N \cdot F_0 \delta^*(x - x_0) dx \end{aligned} \quad (4.28)$$

referentes à massa, cargas distribuídas e cargas concentradas, respectivamente.

Após a integração por partes, a derivada mais elevada é de terceira ordem, pelo que é necessário que a função de resposta, $w(x)$, seja completa até à terceira derivada. Tendo em conta, a aproximação polinomial feita em (4.18), $w(x,t)$ deverá ser então, no mínimo, um polinómio cúbico. Os restantes termos que formam os integrais, correspondentes à rigidez de flexão, apresentam derivadas de segunda ordem e, por isso, a solução deverá ser derivável até à sua segunda derivada e apresentar continuidade C^1 .

A solução aproximada $w(x,t)$ pode ser discretizada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} w(x,t) &= N_1(x)q_1(t) + N_2(x)q_2(t) + N_3(x)q_3(t) + \dots + N_n(x)q_n(t) \\ &= \mathbf{N}^T(x)\mathbf{q}(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{q}(t)$ é o conjunto de soluções discretas, neste caso os deslocamentos nodais segundo os n graus de liberdade, e $\mathbf{N}(x)$ o conjunto de funções interpoladoras que permitem obter a solução em todo o domínio. Como já referido no Capítulo 2, no caso particular de as funções de peso, P , serem iguais às funções interpoladoras dos deslocamentos, então o método é conhecido como *Método dos Resíduos Pesados de Galerkin*.

Atendendo às condições do parágrafo anterior, as funções interpoladoras ou de forma são convenientemente definidas como um conjunto formado pelos polinómios cúbicos de Hermite, $f_1(x)$ - $f_4(x)$ - utilizados sempre que as condições de fronteira permitam a existência de movimento ou sempre que seja necessário garantir continuidade entre elementos -, um conjunto de funções de ordem superior definidas pelo polinómio de Legendre, $f_r(x)$ – cujos valores e

cujas derivadas nas extremidades são nulos e por isso úteis para enriquecer o interior do elemento – e um conjunto de novas funções polinomiais dependentes da localização da fenda, formuladas por *Stojanovic et al.* [42], definidas da seguinte forma em coordenadas globais.

$$f_1^d(L, Lc, \xi) = \begin{cases} \frac{(1 + \xi)^2(6L_c + L(1 - 2\xi))}{8L}, & -1 \leq \xi \leq 2L_c/L \\ \frac{(L + 2L_c)^3(\xi - 1)^2(L - 6L_c + 2L\xi)}{8L(L - 2L_c)^3}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

$$f_2^d(L, Lc, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi^2)\left(\xi - \frac{2L_c}{L}\right), & -1 \leq \xi \leq 2L_c/L \\ \frac{(L + 2L_c)^2(\xi - 1)^2\left(\xi - \frac{2L_c}{L}\right)}{4L(L - 2L_c)^2}, & 2L_c/L \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

O conjunto das funções de forma fica definido da seguinte forma:

$$\mathbf{N}^w(x)^T = [f_1^d(L, Lc, x) f_2^d(L, Lc, x) f_1(x) f_2(x) \dots f_r(x)] \quad (4.32)$$

Atendendo à discretização da variável dependente $w(x, t)$ introduzida em (4.29), o integral definido na equação (4.21) fica,

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho A \mathbf{N}(x) \mathbf{N}(x)^T dx \ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} R(x) dx \mathbf{q}(t) = \\ & -\mathbf{N}(x) R(x) \frac{\partial^3 \mathbf{N}^T}{\partial x^3} \mathbf{q}(t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \left[\mathbf{N}(x) \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} R(x) \right] \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial x^2} \mathbf{q}(t) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ & + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{F}(t) dx + F_0 \mathbf{N}(x_0) \cdot \end{aligned} \quad (4.33)$$

A equação anterior é da forma,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_d \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(x, t) \quad (4.34)$$

e representa a *forma fraca* da equação diferencial do movimento, onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são, respectivamente, a matriz de massa e de rigidez da viga danificada.

A transformação de coordenadas globais para coordenadas locais é feita pela relação $\xi = 2x/L$. Aplicando a regra da cadeia, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi^2} \frac{4}{L^2}\end{aligned}\quad (4.35)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho A \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}(\xi)^T dx \\ &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho A \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}(\xi)^T \frac{dx}{d\xi} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\rho AL}{2} \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}(\xi)^T d\xi \\ \mathbf{M} &= \frac{\rho AL}{2} \left[\int_{-1}^{\frac{2}{L}L_c} \mathbf{N}_1(\xi) \mathbf{N}_1(\xi)^T d\xi + \int_{\frac{2}{L}L_c}^1 \mathbf{N}_2(\xi) \mathbf{N}_2(\xi)^T d\xi \right]\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_d &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial \xi^2} R(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{4}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi^2} \frac{4}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial \xi^2} R(\xi) \frac{L}{2} d\xi \\ \mathbf{K}_d &= \frac{8EI}{L^3} \left[\int_{-1}^{\frac{2}{L}L_c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_1^T}{\partial \xi^2} Q(\xi) d\xi + \int_{\frac{2}{L}L_c}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_2^T}{\partial \xi^2} Q(\xi) d\xi \right]\end{aligned}\quad (4.37)$$

onde,

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + C e^{\left(\frac{-2\alpha}{d} \left| \frac{L}{2} \xi - L_c \right| \right)}}\quad (4.38)$$

No que respeita ao amortecimento, opta-se novamente pelo amortecimento proporcional de rigidez, dado de uma forma geral por:

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} \quad (4.39)$$

com,

$$\beta = \frac{2\xi_1}{\omega_1} \quad (4.40)$$

sendo β a constante de proporcionalidade de rigidez, ξ_1 e ω_1 a razão de amortecimento e a frequência natural do primeiro modo vibração do sistema. Atendendo ao estado bilinear do sistema, as equações do movimento para a viga danificada podem ser escritas da forma:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\xi, t) & , \text{se fenda fechada} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_d\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_d\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\xi, t) & , \text{se fenda aberta} \end{cases} \quad (4.41)$$

O estado do sistema é determinado pela curvatura da viga, $\gamma(\xi)$, na localização da fenda, dada por:

$$\gamma(\xi) = \frac{4}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial \xi^2} \mathbf{q}(t) \quad (4.42)$$

Considera-se como ponto de transição de estado, γ_0 , a curvatura nula de modo a que se despreze a influência do peso próprio da viga.

$$\begin{cases} \text{fenda fechada} & , \text{se } \gamma < 0 \\ \text{fenda aberta} & , \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

4.4 FECHO DO CAPÍTULO

O Capítulo 4 iniciou-se com uma introdução ao método exacto de derivação das frequências naturais de vibração segundo a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Mostrou-se que existem diferenças significativas em relação ao verificado pela teoria de Timoshenko, desde logo a existência de apenas um “espectro” de frequências. São conhecidos e tabelados os valores exactos das raízes das equações de frequência, para as diferentes condições de fronteira. Apresenta-se no subcapítulo 4.2 uma tabela referente a vigas encastradas-livres e duplamente encastradas. Posteriormente, no subcapítulo 3.3, foi introduzido o modelo de elementos finitos tipo-p, baseado no trabalho de Christides e Barr [14]. O modelo apresentado apresenta relações deformação-tensão e deformação-deslocamento lineares é válido para vigas elásticas e isotrópicas e considera amortecimento proporcional de rigidez. A forma fraca da equação do

movimento foi derivada pelo *Método dos Resíduos Pesados de Galerkin*. Foram também consideradas duas funções cúbicas dependentes da localização do dano e derivadas na referência [42], de forma a aumentar a sensibilidade do método à presença da fenda.

CAPÍTULO 5

PRIMEIRA APROXIMAÇÃO À TEORIA DE CHRISTIDES E BARR, PARA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

5.1 INTRODUÇÃO

A importância da não-linearidade geométrica está directamente relacionada com a limitação das teorias convencionais de vigas em lidar com grandes deslocamentos.

Neste capítulo, pretende-se principiar o estudo da influência da não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán na aplicação do MEF baseado na teoria de vigas com dano de Christides e Barr [14], tal como apresentado no capítulo anterior. A solução proposta é apenas uma primeira aproximação ao problema. Não serão derivadas novas funções modeladoras de rigidez, $Q(x)$, na presença de uma fenda. Tal seria o procedimento correcto, uma vez que os resultados formulados por Christides e Barr são baseados numa relação deformação-deslocamento linear. Em vez disso, tais funções serão introduzidas directamente na rigidez de flexão e também na de extensão, resultante dos deslocamentos longitudinais introduzidos pela não-linearidade.

5.2 PRIMEIRA APROXIMAÇÃO À TEORIA DE CHRISTIDES E BARR, PARA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A figura 4.1, do capítulo anterior, mostra uma viga com uma fenda de fadiga e as suas dimensões principais. Considera-se que as dimensões da secção recta viga são constantes ao longo do seu comprimento, com excepção para a posição da fenda. A secção recta é considerada como sendo rectangular e o material elástico, homogéneo e isotrópico. O referencial é colocado no centro da viga, de coordenadas (ζ, z) , cuja relação com a coordenada cartesiana x é $\zeta = 2x/L$.

O modelo de elementos finitos apresentado baseia-se na teoria de vigas de Euler-Bernoulli novamente, para que seja comparável ao do capítulo anterior. Seja o campo de deslocamentos definido por:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u^0(x, t) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \\ w(x, z, t) = w^0(x, t) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $u(x, z, t)$ e $w(x, z, t)$ são as componentes longitudinal e transversal do deslocamento e u^0 e w^0 os deslocamentos no eixo neutro da viga. A equação (5.1) pode ser representada na forma matricial da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \mathbf{Z} \mathbf{d}(x, t) \quad (5.2)$$

com,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{d}(x, t) = \begin{Bmatrix} u^0(x, t) \\ w^0(x, t) \end{Bmatrix}$$

A relação entre tensões e deformações longitudinais é não-linear, do tipo de Von Kármán [42], e é dada por:

$$\varepsilon_{xx}(x, z, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (5.4)$$

Introduzindo (5.1) na equação anterior, fica:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}(x, z, t) = \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \gamma_{xz}(x, z, t) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

O campo de deformações pode ser definido apenas segundo a direcção longitudinal e representado na forma matricial da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}(x, z, t) = \mathcal{L} \mathbf{Z} \mathbf{d}(x, t) \quad (5.6)$$

onde \mathcal{L} é o operador diferencial,

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (5.7)$$

Como referido, o referencial da viga, na direcção longitudinal é representado em coordenadas naturais. Este tipo de representação é muito comum no MEF por permitir abordar de forma simples elementos de geometria complexa, possibilitando uma fácil integração numérica da equação diferencial do movimento. Atendendo à relação $\xi = 2x/L$ e aplicando a regra da cadeia, obtém-se a projecção do operador diferencial em coordenadas naturais, da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{2}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \quad (5.8)$$

A discretização dos deslocamentos é novamente feita pelo produto de deslocamentos nodais e funções interpoladoras, de tal forma que:

$$\mathbf{d}(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi, t) \mathbf{q}(\xi, t) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u^0(\xi, t) \\ w^0(\xi, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^u(\xi)^T & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^w(\xi)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

onde $\mathbf{N}(\xi)$ é a matriz das funções de forma e $\mathbf{q}(t)$ o vector dos deslocamentos generalizados, agrupados em relação aos deslocamentos u e w . As matrizes de funções interpoladoras são as definidas nos capítulos anteriores:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^u(\xi)^T &= [f_1^d(L, Lc, \xi) \ f_2^d(L, Lc, \xi) \ g_1(\xi) \ g_2(\xi) \ \dots \ g_r(\xi)] \\ \mathbf{N}^w(\xi)^T &= [f_1^d(L, Lc, \xi) \ f_2^d(L, Lc, \xi) \ f_1(\xi) \ f_2(\xi) \ \dots \ f_r(\xi)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para os deslocamentos transversais, o conjunto de funções de forma é composto por duas funções sensíveis à localização do dano $f_1^d(L, Lc, \xi)$ e $f_2^d(L, Lc, \xi)$ [42], pelos polinómios cúbicos de Hermite $f_1(\xi)$ - $f_4(\xi)$, para atribuição das condições de fronteira, e por um conjunto de funções de ordem superior, $f_r(\xi)$, derivadas pelo polinómio de Legendre, para enriquecimento interno do elemento. No que respeita aos deslocamentos longitudinais, seja o conjunto de funções de forma formado por duas funções lineares $g_1(\xi)$ e $g_2(\xi)$, pelos polinómios cúbicos de Hermite $f_1(\xi)$ - $f_4(\xi)$ e por um conjunto de polinómios de ordem superior, derivados dos de Legendre, $g_r(\xi)$ [46].

Introduzindo (5.9) em (5.6) obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, z, t) = \mathcal{L} \mathbf{Z} \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}(t) \quad (5.11)$$

Para um material linear elástico, homogéneo e isotrópico, a relação tensão-deformação é a seguinte:

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, z, t) = E\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, z, t) \quad (5.12)$$

sendo E o módulo de Young do material e $\boldsymbol{\sigma}(\xi, z, t)$ o vector das tensões, cujo único componente neste caso são as tensões normais.

A equação diferencial do movimento é obtida pelo *Princípio dos Trabalhos Virtuais*:

$$\delta W_{in} + \delta W_V + \delta W_{ext} = 0 \quad (5.13)$$

onde, δW_{in} , δW_V e δW_{ext} são, respectivamente, os trabalhos virtuais das forças de inércia, das forças internas e das forças externas.

O trabalho virtual das forças de inércia é dado por:

$$\begin{aligned} \delta W_{in} &= - \int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV \\ &= - \int_V \rho \left[\left(\delta \mathbf{q}_u^T \mathbf{N}_u - z \delta \mathbf{q}_w^T \frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \xi} \right) \left(\mathbf{N}_u^T \ddot{\mathbf{q}}_u - z \frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_w^T}{\partial \xi} \ddot{\mathbf{q}}_w \right) \right. \\ &\quad \left. + (\delta \mathbf{q}_w^T \mathbf{N}_w \mathbf{N}_w^T \ddot{\mathbf{q}}_w) \right] \frac{L}{2} dV \end{aligned} \quad (5.14)$$

A expressão anterior é da forma:

$$\delta W_{in} = -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (5.15)$$

com,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_w \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

sendo $\delta \mathbf{q}^T$ é o vector linha dos deslocamentos nodais virtuais, $\ddot{\mathbf{q}}$ o vector coluna das acelerações nodais, \mathbf{M} é a matriz de massa que é constituída por duas sub-matrizes \mathbf{M}_u e \mathbf{M}_w referentes cada uma delas aos deslocamentos longitudinais e aos deslocamentos transversais. Desprezando o efeito da inércia da secção recta da viga, isto é,

$$\int_V \frac{4}{L^2} z^2 \delta \mathbf{q}_w^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_w^T}{\partial \xi} \ddot{\mathbf{q}}_w \frac{L}{2} dV \cong 0 \quad (5.17)$$

a matriz \mathbf{M} fica definida da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_u = \frac{\rho b h L}{2} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \mathbf{N}_{u1} \mathbf{N}_{u1}^T d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \mathbf{N}_{u2} \mathbf{N}_{u2}^T d\xi + \right] \quad (5.18)$$

$$\mathbf{M}_w = \frac{\rho b h L}{2} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \mathbf{N}_{w1} \mathbf{N}_{w1}^T d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \mathbf{N}_{w2} \mathbf{N}_{w2}^T d\xi + \right]$$

O trabalho virtual das forças internas é dado por:

$$\delta W_V = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (5.19)$$

$$\Leftrightarrow - \int_V \left[\delta \left(\frac{2}{L} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} \right) + \delta \left(\frac{1}{2} \frac{4}{L^2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 \right) - \delta \left(z \frac{4}{L^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi^2} \right) \right] \cdot E \cdot \left[\frac{2}{L} \frac{\partial u^0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{4}{L^2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 - z \frac{4}{L^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \xi^2} \right] \frac{L}{2} dV$$

Tendo em conta que,

$$\delta \left(\frac{1}{2} \frac{4}{L^2} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 \right) = 2 \frac{1}{2} \frac{4}{L^2} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \delta \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right) \quad (5.20)$$

e fazendo,

$$\left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} = \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_w^T}{\partial \xi} \mathbf{q}_w \quad (5.21)$$

obté-m-se,

$$\delta W_V = - \int_V \left[\frac{2}{L} \delta \mathbf{q}_u^T \frac{\partial \mathbf{N}_u}{\partial \xi} + \frac{4}{L^2} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \left(\delta \mathbf{q}_w^T \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial \xi} \right) - z \frac{4}{L^2} \delta \mathbf{q}_w^T \frac{\partial^2 \mathbf{N}_w}{\partial \xi^2} \right] \cdot E \cdot \left[\frac{2}{L} \frac{\partial \mathbf{N}_u^T}{\partial \xi} \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \frac{4}{L^2} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_w^T}{\partial \xi} \mathbf{q}_w - z \frac{4}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_w}{\partial \xi^2} \mathbf{q}_w \right] \frac{L}{2} dV \quad (5.22)$$

que é da forma,

$$\delta W_V = - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (5.23)$$

Em (5.23) \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema, composta por um conjunto de sub-matrizes, organizadas consoante se referem a termos *lineares*, \mathbf{K}^L , ou *não-lineares*, \mathbf{K}^{NL} , e que se agrupam da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^L + \mathbf{K}^{NL} \quad (5.24)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w) \\ \mathbf{K}_{bl}(\mathbf{q}_w) & \mathbf{K}_{bb}(\mathbf{q}_w) \end{bmatrix}$$

sendo \mathbf{K}_l a matriz de rigidez linear de longitudinal, \mathbf{K}_b a matriz de rigidez linear de flexão, $\mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w)$ e $\mathbf{K}_{bl}(\mathbf{q}_w)$ duas matrizes de rigidez não-lineares e que introduzem no sistema um acoplamento entre os deslocamentos longitudinais e transversais e $\mathbf{K}_{bb}(\mathbf{q}_w)$ uma matriz de rigidez não-linear referente à flexão da viga. As matrizes não lineares são função dos deslocamentos generalizados. Uma vez que estes últimos são ao mesmo tempo solução e parte integrante do sistema de equações do movimento, é necessário um processo de resolução iterativo até que os resultados convirjam para um erro mínimo aceitável.

Do integral de (5.22) definem-se as seguintes matrizes rigidez:

$$\mathbf{K}_l = \frac{2EA}{L} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} d\xi + \right] \quad (5.25)$$

$$\mathbf{K}_b = \frac{8EI}{L^3} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w1}^T}{\partial \xi^2} d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w2}^T}{\partial \xi^2} d\xi + \right] \quad (5.26)$$

$$\mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w) = \frac{2EA}{L^2} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}^T}{\partial \xi} d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (5.27)$$

$$\mathbf{K}_{bl}(\mathbf{q}_w) = \frac{4EA}{L^2} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (5.28)$$

$$\mathbf{K}_{bb}(\mathbf{q}_w) = \frac{4EA}{L^3} \left[\int_{-1}^{\frac{2l_c}{L}} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}^T}{\partial \xi} d\xi + \int_{\frac{2l_c}{L}}^1 \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}^T}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (5.29)$$

Determinadas as matrizes de massa e rigidez do sistema, a equação do movimento para uma viga Euler-Bernoulli com não-linearidade geométrica de Von Kármán é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_w(t) \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_l & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w(t)) \\ \mathbf{K}_{bl}(\mathbf{q}_w(t)) & \mathbf{K}_{bb}(\mathbf{q}_w(t)) \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u^{ext}(t) \\ \mathbf{F}_w^{ext}(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

No caso em estudo, pretende-se apenas analisar a resposta no tempo dos deslocamentos transversais, tal como feito nos capítulos anteriores. Nesse contexto, o objectivo é avaliar o efeito da não-linearidade geométrica nesse tipo de movimento. Sabe-se à partida, bastando para isso observar a expressão (5.30), que existe acoplamento entre o movimento nas direcções longitudinal e transversal, concluindo-se naturalmente que existe uma influência mútua entre cada tipo de deslocamento. Tendo em conta as considerações feitas, é possível simplificar o sistema de equações anterior admitindo que não serão aplicadas cargas normais a secção da viga e desprezando o efeito da inércia do movimento longitudinal, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{q}}_u = 0 \\ \mathbf{F}_u^{ext}(t) = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Desta forma é possível determinar directamente o valor dos deslocamentos \mathbf{q}_u e obter um único sistema de equações diferenciais do movimento, para a direcção transversal. Da primeira equação do sistema (5.30) consegue-se a seguinte relação:

$$\mathbf{K}_l \mathbf{q}_u(t) + \mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w(t)) \mathbf{q}_w(t) = 0 \quad (5.32)$$

Pré multiplicando ambos os termos da equação pela matriz inversa de \mathbf{K}_l , fica:

$$\mathbf{q}_u(t) = -\mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w(t)) \mathbf{q}_w(t) \quad (5.33)$$

Introduzindo a solução anterior na segunda equação de (5.30), determina-se a equação diferencial do movimento do sistema, segundo a direcção transversal:

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w(t) + \left(\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_{bb}(\mathbf{q}_w(t)) - \mathbf{K}_{bl}(\mathbf{q}_w(t)) \mathbf{K}_l^{-1} \mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w(t)) \right) \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{F}_w^{ext}(t) \quad (5.34)$$

De forma simplificada escreva-se:

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w(t) + \mathbf{K}^{res} \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{F}_w^{ext}(t) \quad (5.35)$$

em que \mathbf{K}^{res} é a matriz de rigidez resultante da simplificação efectuada. A matriz de amortecimento é definida pelo amortecimento proporcional de rigidez:

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} \quad (5.36)$$

com,

$$\beta = \frac{2\xi_1}{\omega_1} \quad (5.37)$$

sendo a equação diferencial do movimento com amortecimento proporcional definida por:

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w(t) + \beta \mathbf{K}^{res} \dot{\mathbf{q}}_w(t) + \mathbf{K}^{res} \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{F}_w^{ext}(t) \quad (5.38)$$

Até agora, a formulação apresentada não contemplou a existência de fendas nas faces da viga. É importante voltar a referir que o procedimento em diante apresentado nunca será mais do que uma primeira aproximação, talvez mesmo grosseira, à extensão da solução de Christides e Barr, para uma relação deformação-deslocamentos não-linear.

Tal como no capítulo anterior, defina-se a função modeladora de rigidez na localização da fenda da seguinte forma:

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + C e^{\left(\frac{-2\alpha}{h} \left| \frac{L}{2}\xi - L_c \right| \right)}} \quad (5.39)$$

onde C é a seguinte razão entre os momentos de área das secções intacta e danificada.

$$C = \frac{I - I_d}{I_d} \quad (5.40)$$

e α é uma constante de valor 0,667, experimentalmente determinada. Novamente a rigidez de flexão não é constante ao longo do comprimento da viga variando exponencialmente na proximidade da fenda. Como primeira abordagem ao problema, considera-se que a rigidez de flexão é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 EI(\xi) &= \frac{EI}{1 + C e^{\left(\frac{-2\alpha}{h} \left| \frac{L}{2}\xi - L_c \right| \right)}} \\
 &= EI Q(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{5.41}$$

A inclusão da não-linearidade geométrica na relação deformações-deslocamentos introduz obrigatoriamente componentes longitudinais no deslocamento, não contabilizados no capítulo anterior. É assim definida uma rigidez de extensão, $EA(\xi)$, também ela afectada na presença de uma fenda. Como primeira abordagem ao problema, considerar-se-á que a mesma função modeladora da rigidez de flexão é aplicável à de extensão. Seja então:

$$\begin{aligned}
 EA(\xi) &= \frac{EA}{1 + C e^{\left(\frac{-2\alpha}{h} \left| \frac{L}{2}\xi - L_c \right| \right)}} \\
 &= EA Q(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

Os integrais (5.25)-(5.29) são reescritos da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_l = \frac{2EA}{L} \left[\int_{-1}^{\frac{2L_c}{L}} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi + \int_{\frac{2L_c}{L}}^1 \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi + \right]
 \tag{5.43}$$

$$\mathbf{K}_b = \frac{8EI}{L^3} \left[\int_{-1}^{\frac{2L_c}{L}} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w1}^T}{\partial \xi^2} Q(\xi) d\xi + \int_{\frac{2L_c}{L}}^1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{w2}^T}{\partial \xi^2} Q(\xi) d\xi + \right]
 \tag{5.44}$$

$$\mathbf{K}_{lb}(\mathbf{q}_w) = \frac{2EA}{L^2} \left[\int_{-1}^{\frac{2L_c}{L}} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi + \int_{\frac{2L_c}{L}}^1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi \right]
 \tag{5.45}$$

$$\mathbf{K}_{bl}(\mathbf{q}_w) = \frac{4EA}{L^2} \left[\int_{-1}^{\frac{2L_c}{L}} \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u1}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi + \int_{\frac{2L_c}{L}}^1 \frac{\partial w^0}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{u2}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi \right]
 \tag{5.46}$$

$$\mathbf{K}_{bb}(\mathbf{q}_w) = \frac{4EA}{L^3} \left[\int_{-1}^{\frac{2L_c}{L}} \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w1}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi + \int_{\frac{2L_c}{L}}^1 \left(\frac{\partial w^0}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{N}_{w2}^T}{\partial \xi} Q(\xi) d\xi \right]
 \tag{5.47}$$

5.3 FECHO DO CAPÍTULO

Foi apresentada uma primeira aproximação à extensão da teoria de Christides e Barr com não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán. Não foi derivada nenhuma solução exacta. Apenas foi apresentada uma primeira proposta à resolução do problema, directamente por via numérica, com um modelo de elementos finitos.

CAPÍTULO 6

RESPOSTA DINÂMICA DE VIGAS COM ENTALHE

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos baseado na teoria de Timoshenko. Considera-se não só a redução local de rigidez, devido à existência de um entalhe numa das superfícies da viga, como também uma redução local da massa sendo, por isso, o entalhe um defeito bidimensional caracterizado por uma profundidade e por uma largura. Recorde-se que o algoritmo de elementos finitos utilizado calcula, para cada instante de tempo, a posição de cada uma das extremidades do entalhe e avalia se estas se tocam ou se sobrepõem, sendo que nessa altura se considera que o entalhe fecha e que a viga se comporta como se estivesse intacta. Um dos objectivos será naturalmente avaliar até que ponto o entalhe realmente fechará e verificar quais as implicações do seu comportamento na resposta global do sistema, que poderá ser linear ou não linear.

De forma a estudar em detalhe o comportamento de uma viga sujeita ao efeito de um entalhe, é de todo o interesse analisar e comparar as respostas, em regime permanente, antes e após a ocorrência de dano. É então definida uma constante real e positiva t_{dano} , referente a esse instante de transição. É também analisada resposta do sistema nos instantes após a abertura do entalhe, durante o período transiente.

São apresentados dois casos de estudo, CE1 e CE2, de dimensões distintas e introduzidas na tabela 6.1. Cada caso será avaliado para as condições de fronteira de encastramento e duplo encastramento e serão excitados por uma força harmónica de amplitude constante, F . São consideradas diferentes frequências de excitação, ω .

Para vigas duplamente encastradas as frequências de excitação são $\omega = \omega_1/3$ e $\omega = \omega_1$, onde ω_1 é a primeira frequência natural da viga sem dano. Para vigas encastradas-livres, as frequências para o caso CE2 são $\omega = \omega_1/3$ e $\omega = \omega_1$, ao passo que para o caso CE1 apenas se considera uma frequência de excitação igual à segunda frequência natural da viga com entalhe, ω_{2d} , de modo a obter uma resposta conforme o segundo modo de vibração, que poderá

favorecer o fecho do entalhe. São também comparados dois entalhes de profundidades diferentes, mantendo constante a sua largura, com o objectivo de avaliar o efeito de progressão do dano.

De referir ainda que, para evitar que a resposta no tempo apresente amplitudes excessivas que estejam para lá do ideal para um modelo cuja relação deformação-deslocamento é linear (diga-se uma amplitude de resposta menor ou igual a 10% a espessura da viga), a amplitude da força de excitação é para todos os casos de somente 0,5N. As figuras 6.1 e 6.2 apresentam uma representação esquemática das vigas e das suas medidas, para as condições de fronteira de encastramento de duplo encastramento.

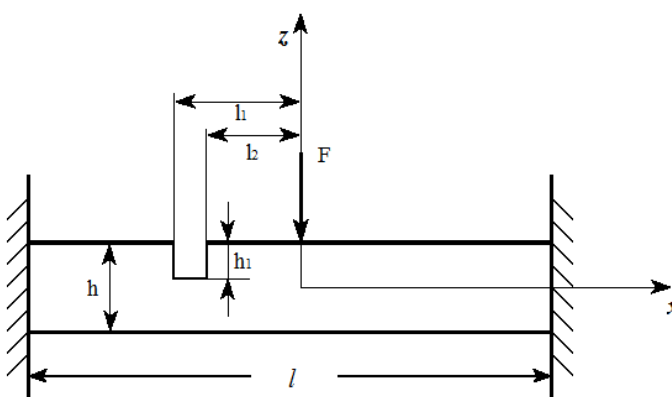


Figura 6. 1 - Dimensões de uma viga com entalhe duplamente encastrada

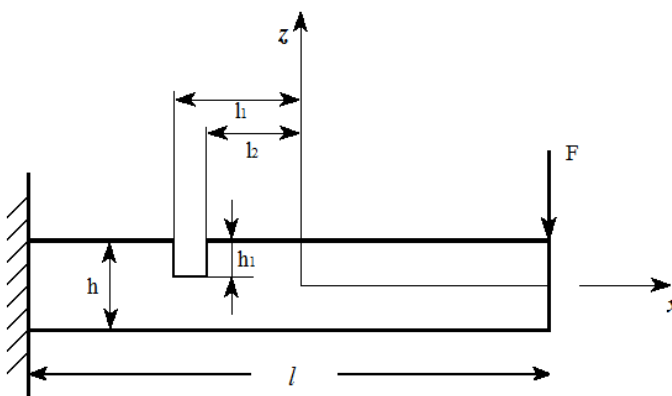


Figura 6. 2 - Dimensões de uma viga com entalhe encastrada

A maioria das dimensões já foi definida em capítulos anteriores. Destaque-se l_c como o ponto médio do entalhe, que define a sua localização no modelo elementos finitos. Em relação aos graus de liberdade do sistema, são considerados graus de liberdade segundo as direcções longitudinal, PL, transversal, PO, e rotacional, P0. Por simplicidade, para todos os casos, o

material escolhido foi o alumínio, bastante comum. A tabela seguinte apresenta os dados relativos aos dois modelos.

Tabela 6. 1 – Dimensões e propriedades materiais comuns a todas as vigas

	$l[m]$	$h[m]$	$b[m]$	$h_1[m]$	h/l	h_1/h	$E[Pa]$	$\rho[kg/m^3]$	ν	ξ [32]
CE1	1,000	0,0500	0,025	0,01	0,05	0,2	7,172E10	2800	0,33	4E-4
				0,02		0,4				
CE2	0,406	0,0203	0,020	0,001	0,05	0,049	7,172E10	2800	0,33	4E-4
				0,009		0,443				

A solução da equação diferencial do movimento é obtida pela aplicação do método de Newmark. Serão analisadas as respostas em regime permanente e regime transiente. A análise das soluções obtidas será feita com base em quatro representações gráficas: resposta no tempo, projecção no plano de fase, secção de Poincaré e espectro de amplitudes [31].

As conclusões e comentários feitos aos resultados obtidos são referenciados, regra geral, pelo trabalho de Nayfeh e Balachandran [31]. Quando necessário, outras referências são introduzidas.

6.2 RESPOSTA DINÂMICA DE VIGAS TIMOSHENKO COM DANO

6.2.1 Resposta em Regime Permanente

6.2.1.1 VIGAS DUPLAMENTE ENCASTRADAS

A tabela 6.2 mostra os dados introduzidos no modelo de elementos finitos para calcular as respostas dinâmicas dos casos CE1 e CE2. Os valores da constante de amortecimento proporcional, β , resultam da aplicação dos valores das tabelas 6.1, 6.3 e 6.4 na equação (3.56).

Tabela 6. 2 – Graus de liberdade, dimensões do entalhe e const. de amortecimento. Vigas duplamente encastradas

	PL	PO	$P\theta$	$l_1[m]$	$l_2[m]$	$l_e[m]$	β
CE1	37	37	37	-0,005	0.005	0,000	4,89E-7
CE2	37	37	37	0,068	0,0755	0,07515	1,98E-7

A validação do modelo de elementos finitos para a viga intacta é feita por comparação dos valores das frequências naturais de vibração, por ele calculados, com os mesmos valores obtidos com o *software* comercial ANSYS®. Para a modelação virtual da viga foi escolhido o elemento BEAM189. Trata-se de um elemento quadrático de três nós, tridimensional, de seis graus de liberdade por nó. O elemento é baseado na teoria de vigas de Timoshenko e, por isso, adequado para a comparação desejada. A discretização foi feita com 300 elementos. Os resultados apresentam-se nas tabelas 6.3 e 6.4.

Tabela 6. 3 – CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas duplamente encastradas

CE1 INTACTO	MEF-p	ANSYS®	Diferença [%]
ω_1	1607,2926	1606,421987	0,054
ω_2	4338,2784	4339,042109	0,017
ω_3	8280,1212	8264,901953	0,184
ω_4	13259,9601	13224,84843	0,265
ω_5	15899,7757	15899,60042	0,001

Tabela 6. 4 – CE2 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas duplamente encastradas

CE2 INTACTO	MEF-p	ANSYS®	Diferença [%]
ω_1	3958,8490	3956,898779	0,049
ω_2	10685,4118	10673,87519	0,108
ω_3	20394,3937	20359,40535	0,172
ω_4	32659,9741	32182,47514	1,484
ω_5	39162,009	39162,46570	0,001

Para o modelo referente à viga danificada, a validação é feita por comparação com os resultados obtidos por Stojanovic et al. [42], que se apresentam na tabela 6.5, referente ao caso CE2. Na tabela 6.6 apresentam-se as frequências naturais para as vigas danificadas.

Tabela 6. 5 - CE2 h1=0,009. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e Stojanovic et al.. Diferença [%]. Vigas duplamente encastradas

CE2 h1=0,009	MEF-p	Stojanovic et al.	Diferença [%]
ω_{1d}	3952,6932	3915,37	0,953
ω_{2d}	10506,2594	10181,9	3,185
ω_{3d}	20346,8206	20277,1	0,343
ω_{4d}	32376,1126	31716,3	2,080

Tabela 6. 6 - Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p. Vigas com entalhe. Vigas duplamente encastradas

	ω_{1d}	ω_{2d}	ω_{3d}	ω_{4d}	ω_{5d}
CE1 h1=0,01	1604,4788	4338,1553	8250,5771	13258,3283	15931,6368
CE1 h1=0,02	1604,0114	4337,7762	8237,2906	13254,5149	15963,6284
CE2 h1=0,001	3958,8095	10670,7043	20391,1349	32637,4444	39176,2162
CE2 h1=0,009	3952,6932	10506,2594	20346,8206	32376,1126	39157,9067

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

As figuras 6.3 e 6.4 seguintes apresentam as respostas no tempo para os casos CE1 e CE2, para várias profundidades de entalhe.

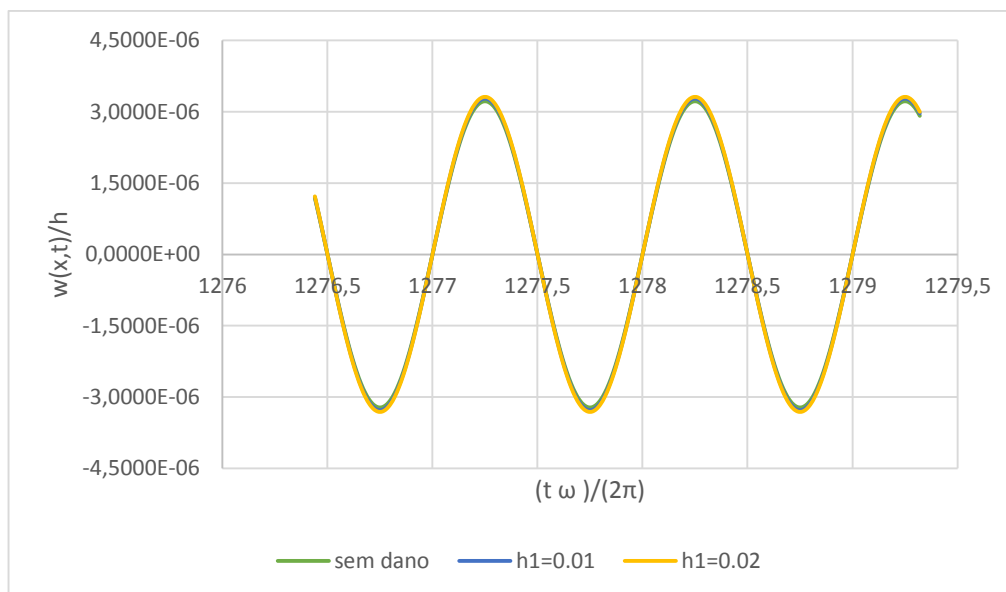


Figura 6. 3 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

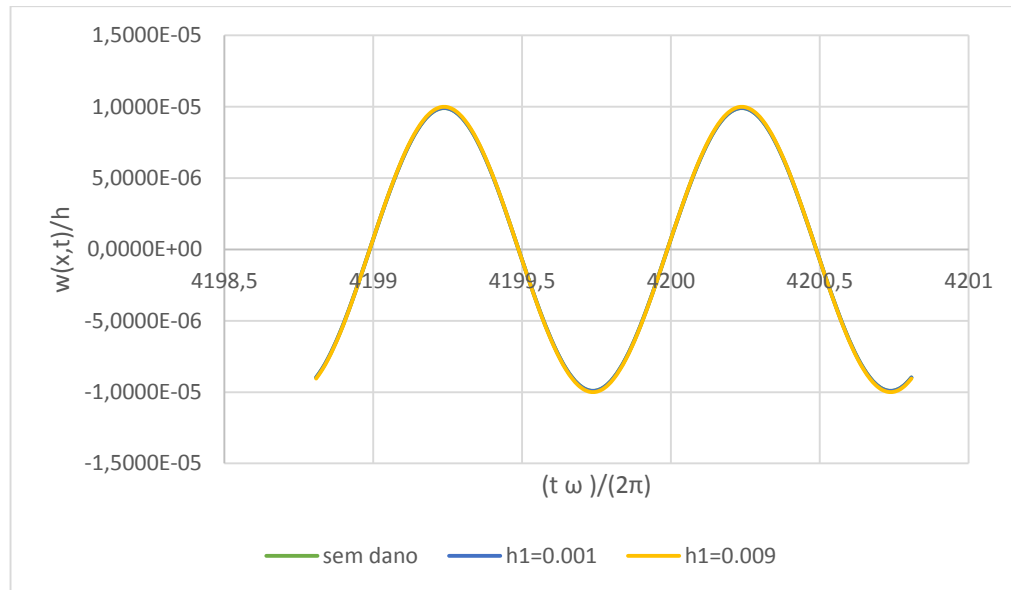


Figura 6. 4 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

A primeira observação a fazer está relacionada com a equidade das respostas no tempo. Constata-se de imediato que, para uma solicitação de baixa frequência, a existência de um entalhe à superfície, mesmo no caso CE2 $h_1=0,009$, onde a profundidade do entalhe é de quase 45% da espessura da viga, não tem influência prezável na dinâmica do sistema, em regime permanente. Não só as amplitudes são praticamente coincidentes, como as soluções são sinusoidais, periódicas e simétricas em relação à configuração de equilíbrio estático. Verifica-se também, naturalmente, que o traço da resposta é uniforme e a envelope plana, o que indica que apenas existirá uma frequência de base e sem harmónicos. Estas características implicam que o sistema, em regime permanente e para uma solicitação de baixa frequência, seja linear periódico.

A figura 6.5 mostra a evolução dos pontos X_A e X_B referentes às extremidades esquerda e direita do entalhe, respectivamente, para o caso CE2 $h_1=0,009$. Observa-se que o deslocamento relativo destes pontos ao longo do tempo é imperceptível, isto é, estes mantêm entre si uma distância praticamente constante. Note-se que o eixo vertical é relativo à cota dos pontos ao longo do eixo horizontal da viga e não a amplitude dos seus movimentos. A primeira grande conclusão a retirar é a de que tais características da resposta implicam que, após abertura, o entalhe não mais fechará.

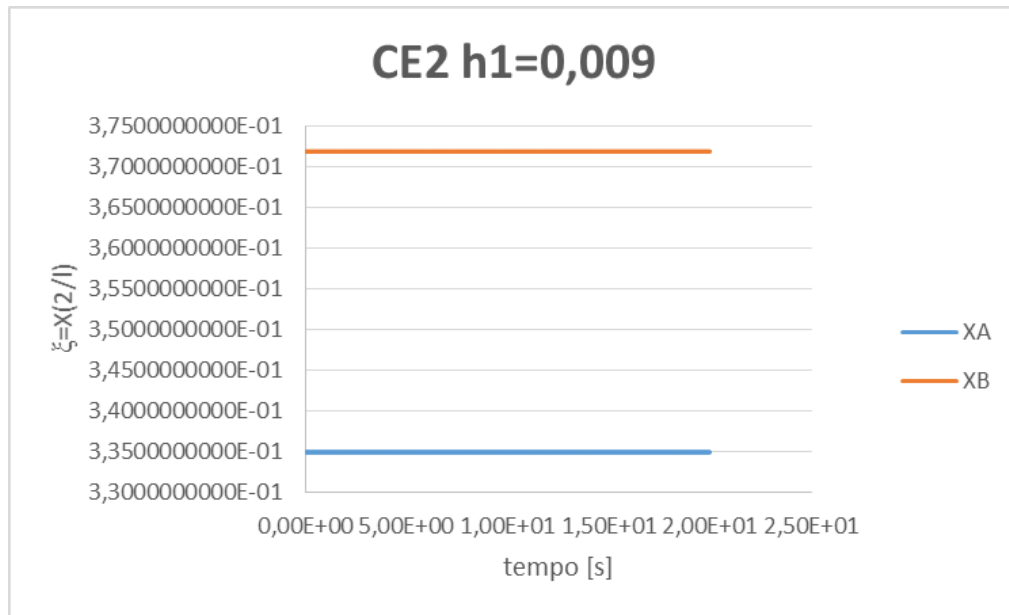


Figura 6. 5 - Posição dos pontos XA e XB do entalhe. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Projecção no Plano de Fase

O plano de fase é formado por duas coordenadas (por exemplo deslocamento e velocidade), necessárias à caracterização do movimento, que se designam por variáveis de estado. No caso do equilíbrio estático, a posição inicial corresponde a um ponto fixo no plano de estados. Após deformação, o novo equilíbrio é caracterizado por um novo ponto fixo no plano. A evolução no tempo corresponde, segundo a mesma lógica, a um conjunto de pontos consecutivos, que descreve uma curva entre o ponto inicial e final. Considerando o movimento periódico de n -períodos, facilmente se compreende que esses dois pontos coincidem no espaço.

As figuras 6.6 e 6.7 apresentam as projecções no plano de fase para os casos de estudo, para as diferentes profundidades do entalhe. Como se esperava, tendo em conta a representação gráfica das respostas no tempo, verifica-se novamente que as soluções são de grande semelhança entre si. Caracterizam-se por ser uma órbita fechada do tipo circular ou elíptico, simétrica em relação às duas variáveis de estado e não distorcida. Por isso, confirma-se que a resposta é linear e periódica de apenas uma frequência base, qualquer que seja o estado do sistema. A não distorção da elipse implica a inexistência de harmónicos no espectro de amplitudes.

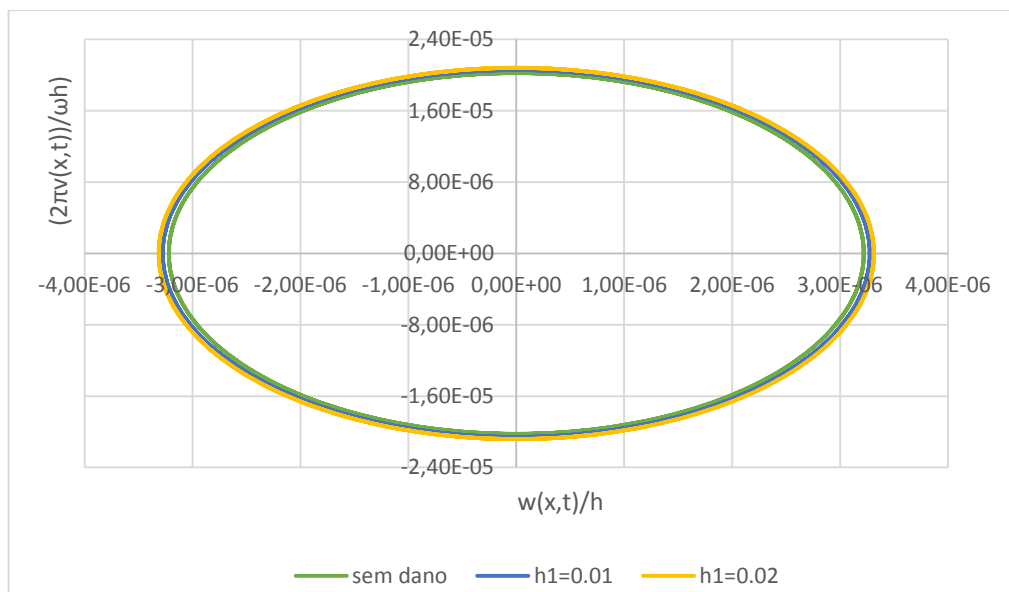


Figura 6. 6 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

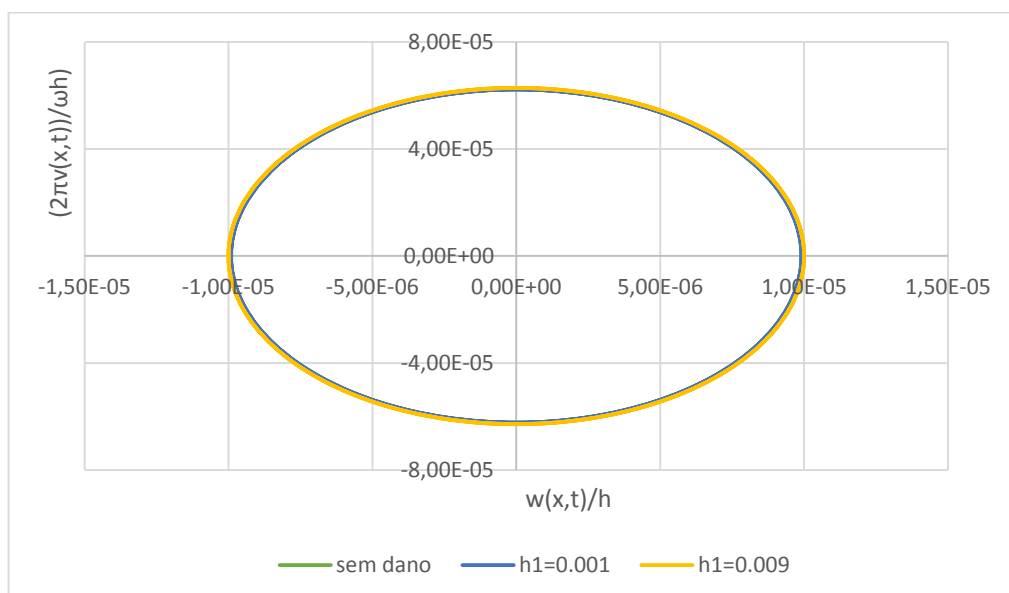


Figura 6. 7 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Secção de Poincaré

Uma secção de Poincaré consiste numa secção que intercepta perpendicularmente a resposta no tempo de um sistema, num determinado instante de tempo. É de grande utilidade na caracterização de uma solução dinâmica, pois permite avaliar o tipo de movimento e determinar, entre outras coisas, o período da solução. Se se definir um intervalo de tempo fixo, T , entre duas intercepções, ao conjunto de k pontos discretos na secção corresponde naturalmente um movimento periódico de período kT , onde k é o número de oscilações no tempo que a resposta efectua antes de cruzar novamente o ponto inicial. A grande vantagem do

recurso à secção de Poincaré é a possibilidade de se determinar com facilidade um período de resposta elevado com k pontos discretos, que na projecção no plano de fase corresponde a k voltas, por vezes difíceis de identificar. Nas figuras 6.8 e 6.9 apresentam-se as intercepções na secção de Poincaré, para os casos CE1 e CE2 e para as diferentes profundidades do entalhe.

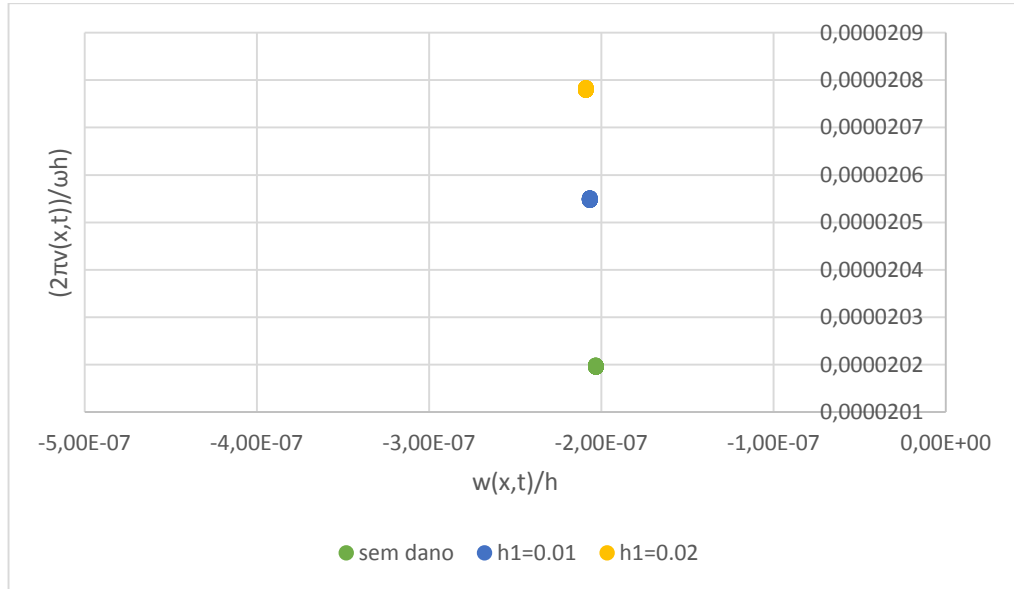


Figura 6. 8 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

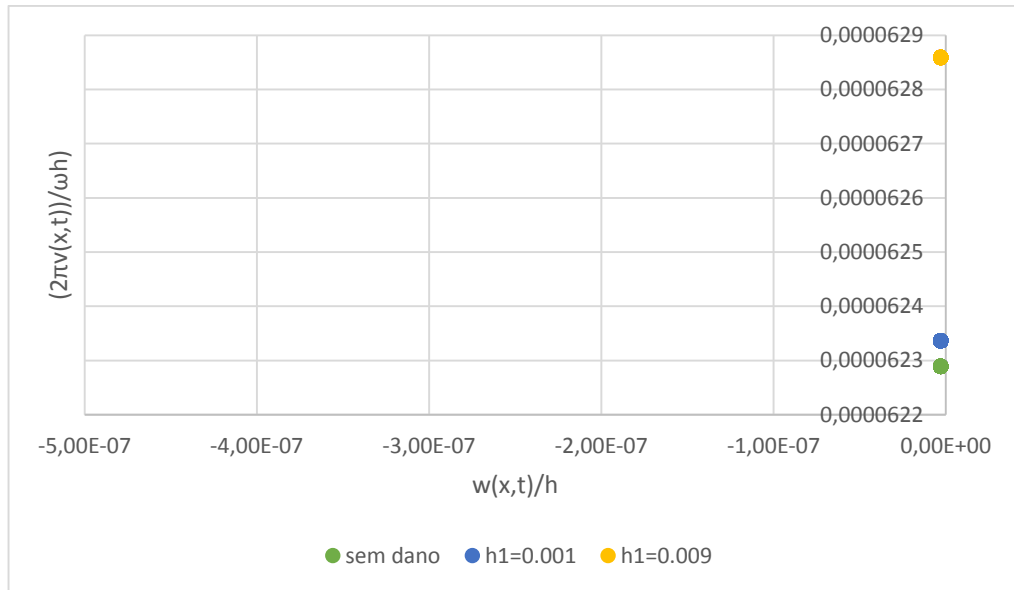


Figura 6. 9 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

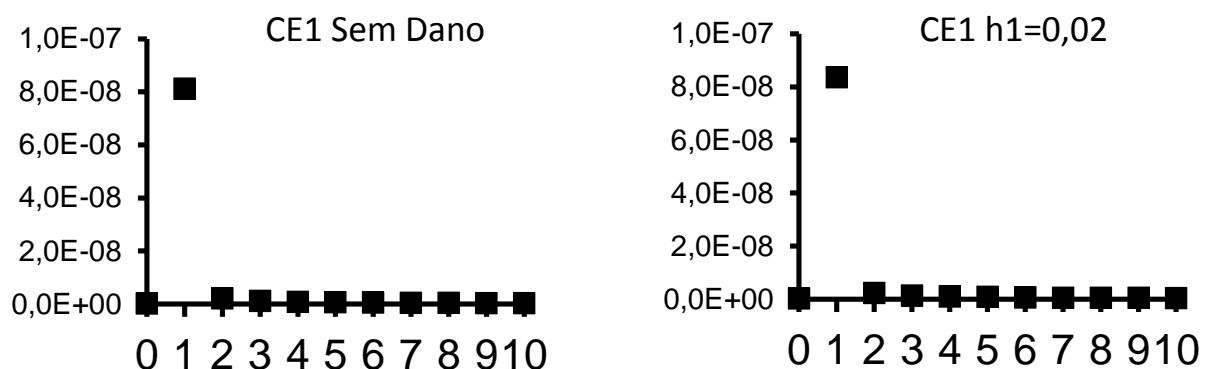
A intersecção com a intersecção de Poincaré é, para todos os casos, um ponto discreto e confirma que as respectivas respostas são periódicas e de apenas uma frequência. Também por esta análise se confirma que os movimentos são lineares periódicos.

É visível pelas figuras anteriores, que entre os casos com e sem dano, verifica-se um ligeiro afastamento dos pontos e esse afastamento é, naturalmente, tanto maior quanto maior a profundidade do entalhe. No entanto, esse afastamento é de várias ordens de grandeza inferiores à unidade e apenas é perceptível devido ao aumento de escala feito no eixo vertical dos gráficos, referente às velocidades.

Espectro de amplitudes

A transformada de Fourier finita é um meio de representar um sinal como a soma finita de funções sinusoidais simples. Estas funções correspondem a linhas discretas no espectro de amplitudes.

Os espectros da figura 6.10 mostram a existência de apenas uma frequência na resposta dos sistemas, a fundamental, mostrando que todas as soluções são lineares periódicas. Verifica-se ainda assim uma influência do segundo harmónico da frequência base. Conhecendo *a priori* a linearidade das respostas e verificando que em todos os casos se verifica esta particularidade, calcula-se que se tratará de um fenómeno conhecido como “*leakage*” [35]. O conceito de “*leakage*” refere-se à “fuga” de energia, que excitaria uma determinada frequência, para outras adjacentes, caracterizadas por pequenos picos de amplitude. É uma consequência da discretização dos dados que resulta em períodos de resposta que não serão exactamente iguais a um submúltiplo inteiro do tempo do sinal analisado. Uma forma de evitar este problema é fazer coincidir o tempo de recolha do sinal com um múltiplo inteiro do período. Na figura 6.10, são apresentados os espectros para a maior profundidade do entalhe.



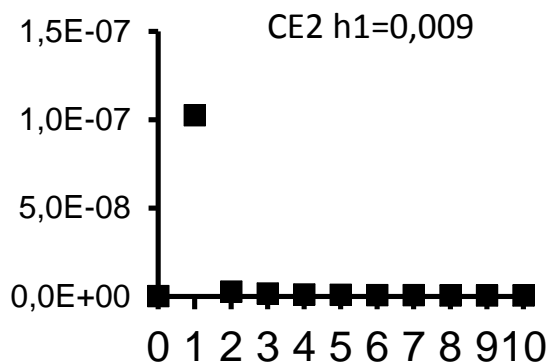


Figura 6. 10 - Espectros de Amplitude. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Após a análise dos resultados obtidos poder-se-á concluir que, do ponto de vista da caracterização e identificação de dano, cujo comportamento seja linear para uma excitação de baixa frequência, as diferenças entre as respostas são praticamente desprezáveis, em regime permanente, o que torna a análise das amplitudes, periodicidade e do espectro de amplitudes inviável.

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Neste capítulo, são apresentados os resultados para uma excitação próxima da ressonância da viga intacta. Ao contrário do verificado para uma excitação de baixa frequência, espera-se agora encontrar diferenças claras nas respostas calculadas. No caso CE2 apenas são representadas as respostas para a viga intacta e para a maior profundidade do entalhe.

Resposta no tempo

Atente-se nas figuras 6.11 e 6.12.

A representação gráfica das respostas no tempo mostra que também para uma excitação próxima da ressonância, os sistemas apresentam, entre eles, um comportamento qualitativamente semelhante. Em todos os casos, as respostas são sinusoidais e simétricas em relação às amplitudes, o que deixa antever de novo que o deslocamento relativo das extremidades do entalhe, X_A e X_B , não é suficiente para que este se considere fechado, tal como se demonstra na figura 6.13. As respostas aparentam também ser periódicas com apenas uma

frequência e de envelope plana e traço uniforme, pelo que não se espera a existência de harmônicos.

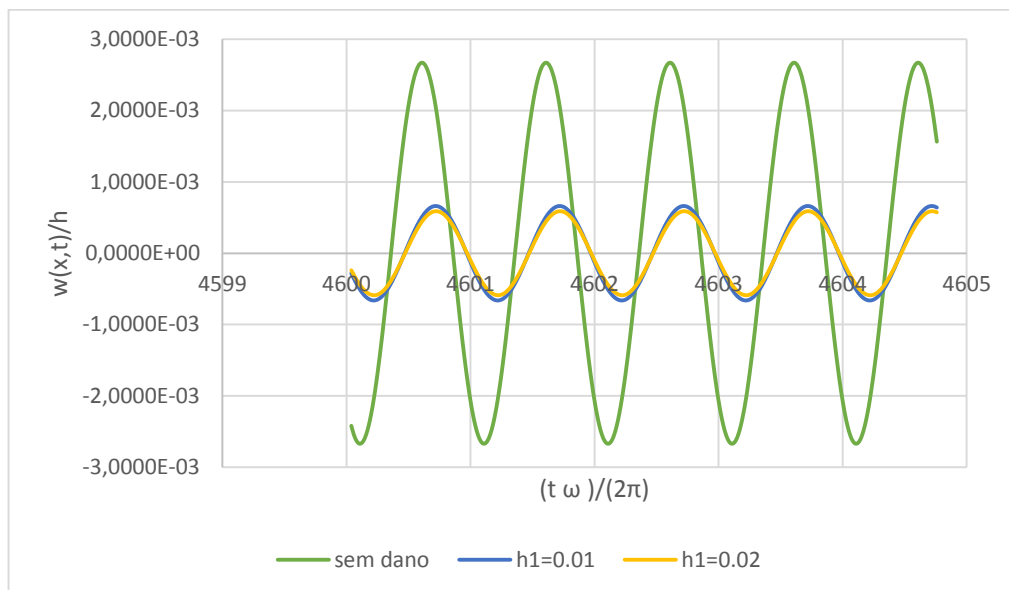


Figura 6. 11 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

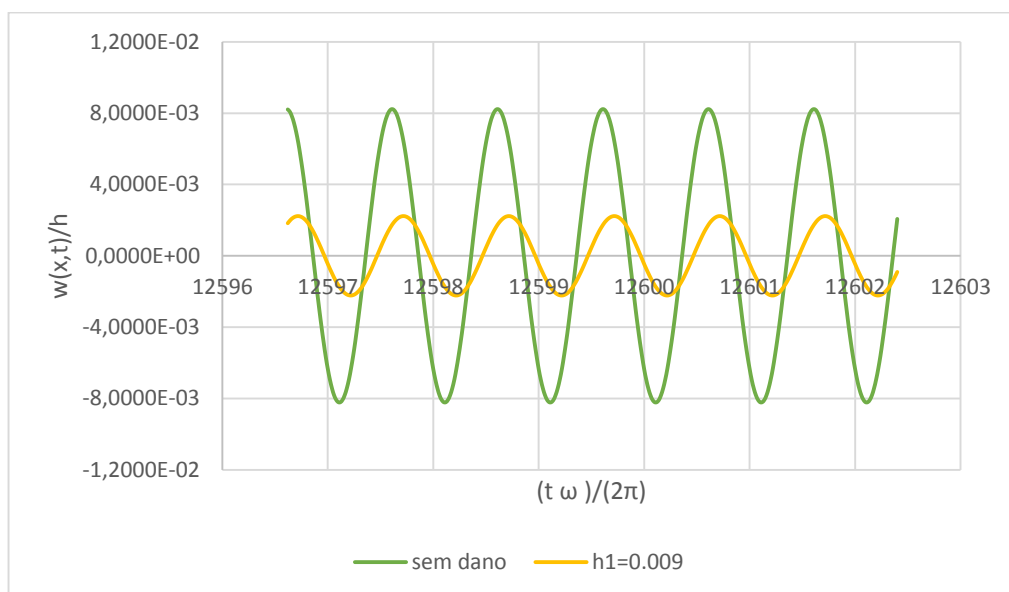


Figura 6. 12 – CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Ao contrário do verificado para uma solicitação de baixa frequência, observam-se agora respostas de amplitude visivelmente diferente. Ainda assim, essas amplitudes são de uma mesma ordem de grandeza, o que sugere que as vigas com entalhe são também elas excitadas numa zona próxima da ressonância.

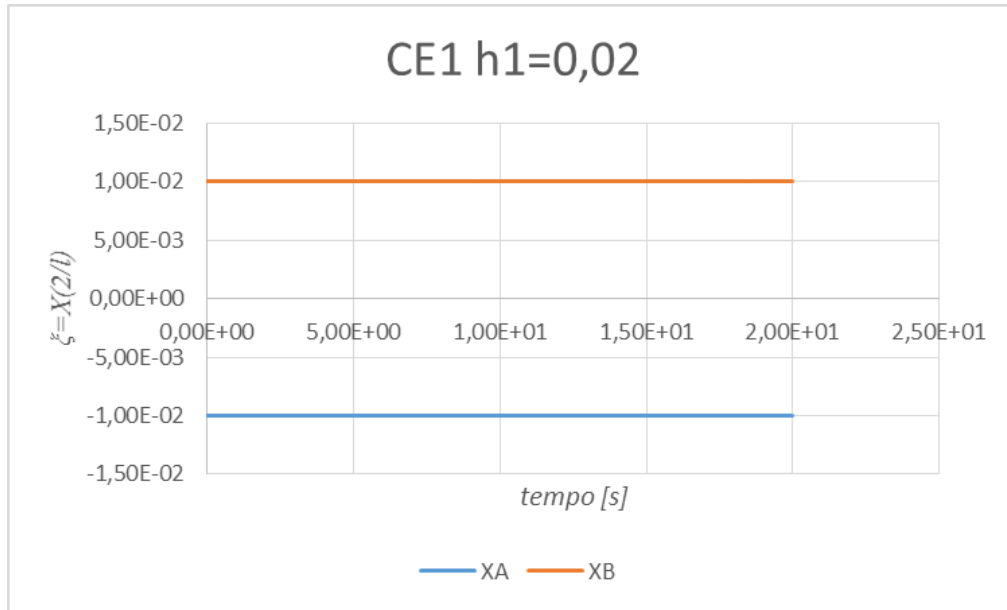


Figura 6. 13 - Posição dos pontos XA e XB do entalhe. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

A diminuição das frequências naturais, prevista pelo modelo e provocada pela existência de um entalhe é menor do que a mesma previsão feita pela teoria unidimensional de vigas com dano de Christides e Barr, como se verá no Capítulo 7. Mesmo se comparada com a diminuição relativa ao cálculo da frequência bilinear apresentada posteriormente (ver equação 7.1). A explicação para esta evidência estará na redução local de massa promovida pela presença do entalhe, que contrariará o efeito da redução de rigidez. De uma forma grosseira, e aproximando o ponto da viga em análise a um grau de liberdade com apenas uma frequência natural, poder-se-á exprimir esta relação pela seguinte expressão clássica para o cálculo da primeira frequência natural para um oscilador harmónico de um grau de liberdade:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.1)$$

A proximidade entre as duas frequências implica que a excitação à primeira frequência natural da viga intacta seja próxima da ressonância daquela com entalhe. Por esse motivo, se justifica que as respostas, embora de amplitudes consideravelmente diferentes, sejam não só da mesma ordem de grandeza como também de uma grandeza elevada.

Verifica-se também um desfasamento no tempo entre as respostas. Na verdade o desfasamento é entre as resposta dos sistemas e a força harmónica, que acaba por se reflectir num desfasamento entre elas próprias. Atente-se na figura 6.14, representativa da evolução do

ângulo de fase entre força e resposta, em função da razão de frequências, aqui também representada por β .

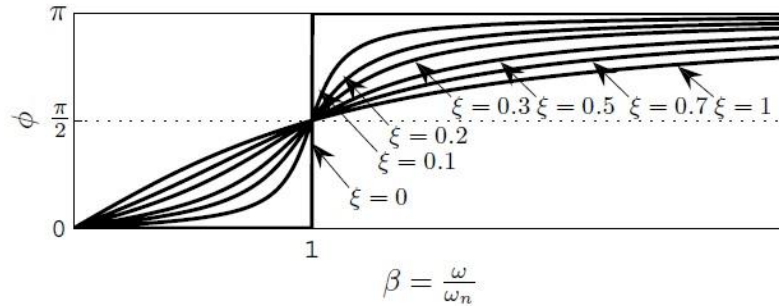


Figura 6. 14 - Ângulo de fase ϕ em função da razão de frequências β tendo como parâmetro a razão de amortecimento ξ . Reproduzido com autorização de J. Dias Rodrigues [35]

Nos exemplos para uma excitação a um terço da frequência natural, e para um amortecimento proporcional bastante baixo, o ângulo de fase, entre respostas e excitação harmônica, será praticamente o mesmo em cada caso, de valor aproximadamente nulo. Para uma frequência de excitação tão elevada como a primeira frequência natural da viga intacta, essa aproximação já não pode ser feita, porque para a viga danificada a razão de frequências será superior à unidade e o ângulo de fase entre resposta e excitação será claramente diferente. A figura mostra uma evolução em degrau para sistemas não amortecidos, portanto tendo em conta que o amortecimento proporcional utilizado em cada caso é muito baixo (ver tabela 6.2), espera-se uma curva próxima de um degrau. De acordo com os valores apresentados nas tabelas 6.3-6.6, no início do capítulo, e considerando o caso CE1 $h_1=0,02$, calculam-se os seguintes valores para a razão de frequências:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1607,2926}{1607,2926} = 1$$

$$\beta_{dano} = \frac{\omega}{\omega_{nd}} = \frac{1607,2926}{1604,0114} = 1,002$$
(6.2)

Segundo a figura 6.14, a proximidade entre os dois valores da razão de frequências, que resulta da pequena redução das frequências naturais da viga com dano neste modelo, implica que o desfaseamento entre as duas respostas no tempo seja inferior a $\pi/2$ radianos.

Projecção no Plano de Fase

A projecção no plano de fase das respostas, nas figuras 6.15 e 6.16, colocam em evidência a linearidade e periodicidade dos sistemas. Em todos os casos, e em conformidade com o verificado nas respostas no tempo, as projecções são caracterizadas por órbitas fechadas de aparência elíptica, típicas de movimentos lineares periódicos, de uma só frequência. As órbitas são também simétricas segundo a orientação das variáveis de estado e não apresentam qualquer distorção, o que confirma a não existência de harmónicos da frequência base. É ainda explícita a diferença de amplitudes de deslocamento e velocidade entre os sistemas com dano e intactos.

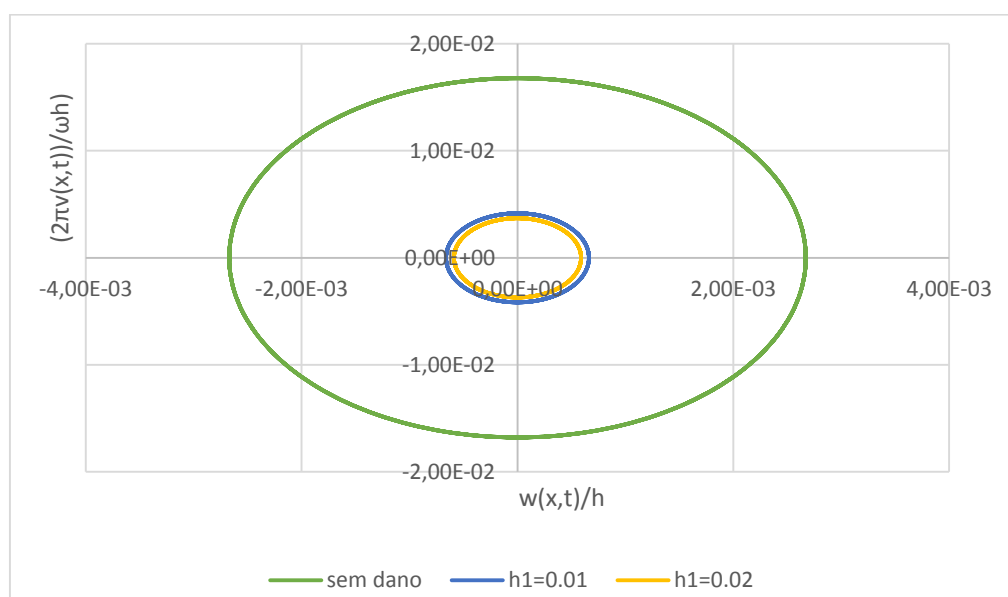


Figura 6. 15 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

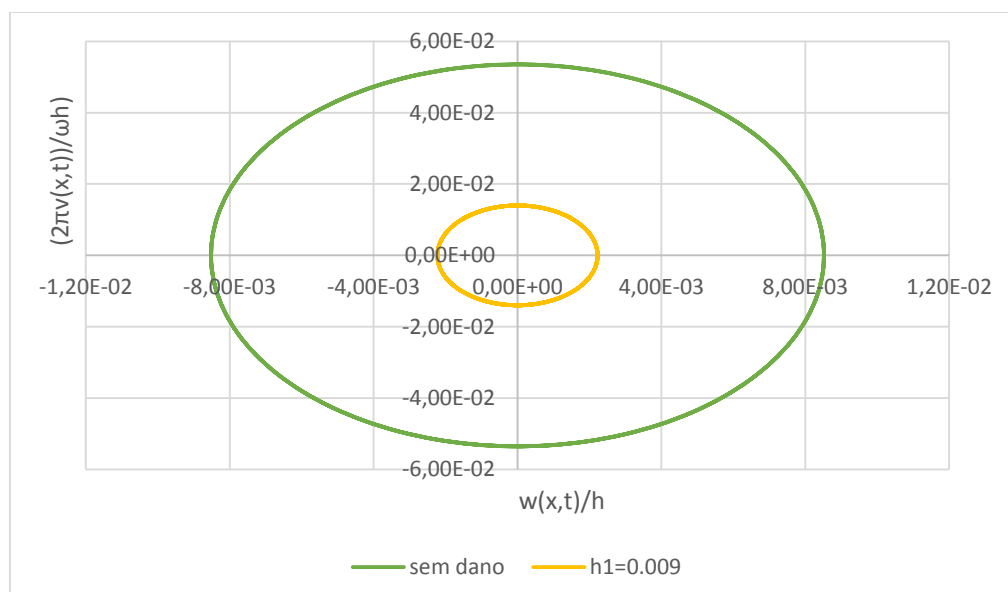


Figura 6. 16 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Secção de Poincaré

Na intersecção com a secção de Poincaré, nas figuras 6.17 e 6.18, todos os casos caracterizam-se por apenas um ponto, pelo que se confirma que as respostas são claramente periódicas de apenas um período e o sistema é linear periódico. Observa-se ainda um afastamento dos pontos relativos ao dano, em relação ao sistema intacto, resultante da diferença de amplitudes de resposta. As figuras seguintes são referentes aos casos CE1 e CE2.

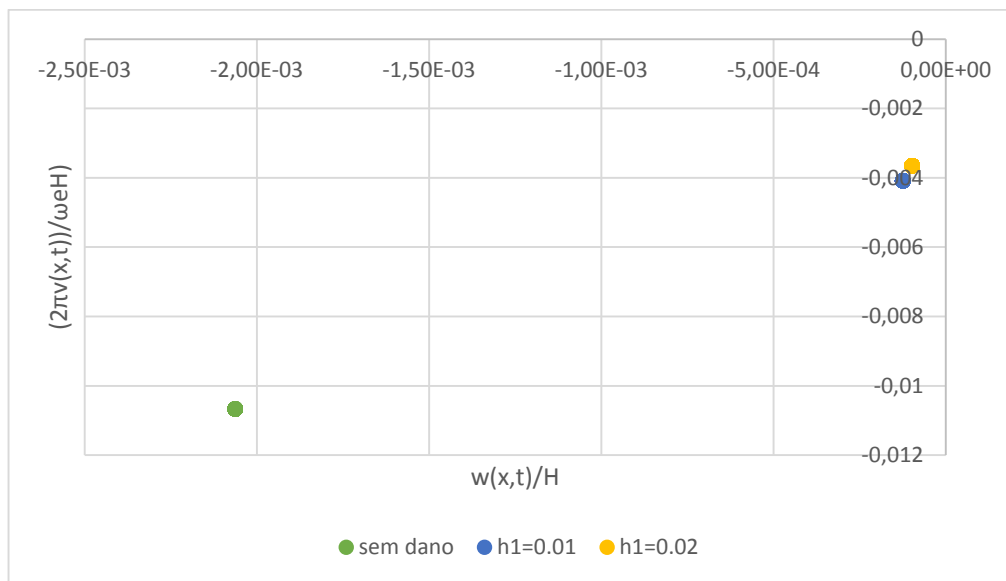


Figura 6. 17 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

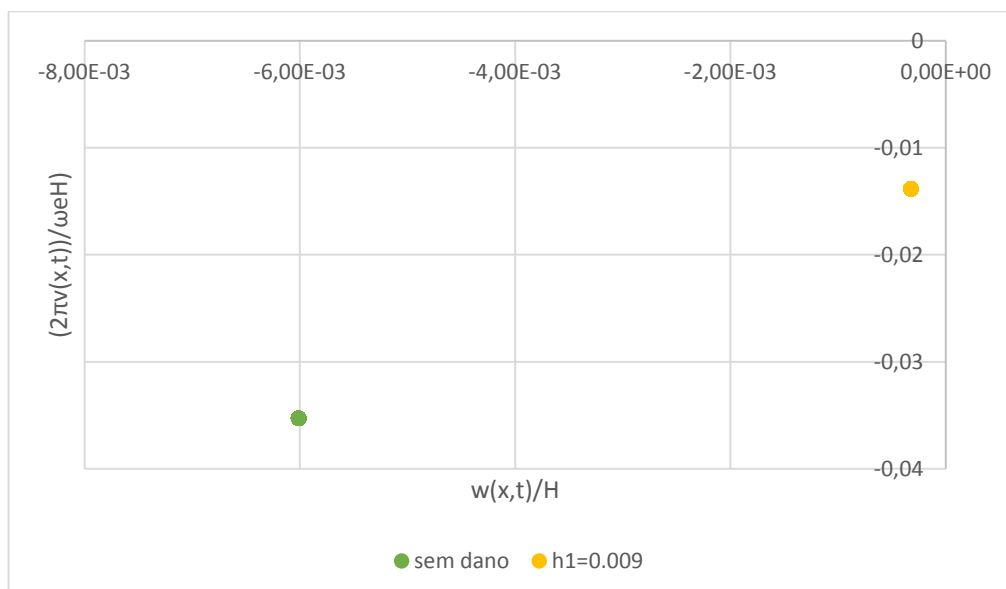


Figura 6. 18 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Espectro de amplitudes

O espectro de amplitudes das vigas com entalhe confirma as conclusões já obtidas. Todos os sistemas são lineares e periódicos de apenas uma frequência base e as suas respostas não sofrem a influência de harmônicos. Verifica-se de novo a existência de “leakage”.

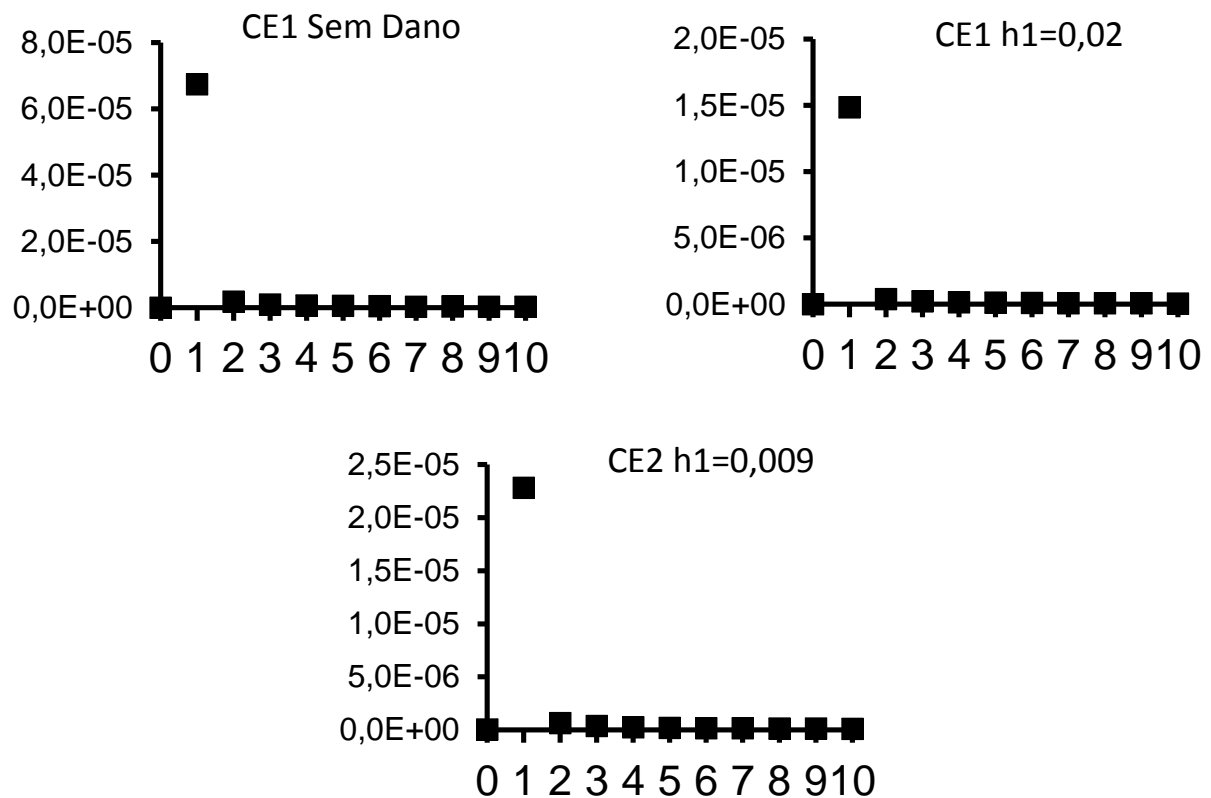


Figura 6. 19 - Espectros de Amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Observado o comportamento das vigas, e uma vez que as respostas são lineares e periódicas e as zonas de ressonância muito próximas, conclui-se que para uma excitação à primeira frequência natural da viga com entalhe, ω_{1d} , se obterão resultados semelhantes. Assim espera-se que a amplitude de resposta do sistema com dano seja superior à do sistema intacto, mas de uma mesma ordem de grandeza, que o desfasamento entre as respostas se mantenha em valores inferiores a $\pi/2$ rad e que o entalhe continuará a apresentar um comportamento linear. No próximo subcapítulo referente à resposta vibratória de vigas encastradas-livres é exposto um caso para uma excitação à segunda frequência natural da viga do caso CE1 h1=0,02 com entalhe. Os resultados obtidos, embora sejam referentes a condições de fronteira diferentes e ao

segundo modo de vibração, podem ser extrapolados sem perda de generalidade para o exemplo deste parágrafo.

6.2.1.2 VIGAS ENCASTRADAS-LIVRES

A tabela seguinte mostra os dados introduzidos no modelo de elementos finitos para calcular as respostas dinâmicas dos casos CE1 e CE2. Os valores de β são calculados através da introdução dos valores das tabelas 6.1, 6.8 e 6.9 na equação (3.56).

Tabela 6. 7 - Graus de liberdade, dimensões do entalhe e const. de amortecimento. Vigas encastradas

	PL	PO	$P\theta$	$l_1[m]$	$l_2[m]$	$l_c[m]$	β	ξ [32]
CE1	27	27	27	-0,279	-0,269	-0,274	5,04E-04	4E-4
CE2	27	27	27	0,068	0,0755	0,07515	1,27E-06	4E-4

A validação do modelo de elementos finitos para a viga intacta é feita por comparação dos valores das frequências naturais de vibração, por ele calculados, com os mesmos valores obtidos com o *software* comercial ANSYS®. Para a modelação virtual da viga foi escolhido o elemento BEAM189. A discretização foi feita com 300 elementos. Os resultados apresentam-se nas tabelas 6.8-6.10. Na tabela 6.6 apresentam-se as frequências naturais para as vigas danificadas.

Tabela 6. 8 - CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas encastradas-livres

CE1 INTACTO	MEF-p	ANSYS®	Diferença [%]
ω_1	256,3429	256,159181	0,072
ω_2	1588,0915	1587,50959	0,037
ω_3	4367,9308	4364,23768	0,085
ω_4	7949,8878	7950,11436	0,003
ω_5	8350,1794	8337,78690	0,149

Tabela 6. 9 – CE2 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e ANSYS®. Diferença [%]. Vigas encastradas-livres

CE2 INTACTO	MEF-p	ANSYS®	Diferença [%]
ω_1	631,3864	631,334459	0,008
ω_2	3911,5532	3910,15188	0,036
ω_3	10758,4347	10749,2734	0,085
ω_4	19581,0045	19580,9186	0,0004
ω_5	20566,8888	20535,9628	0,150

Tabela 6. 10 - Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p. Vigas com entalhe. Vigas encastradas-livres

	ω_{1d}	ω_{2d}	ω_{3d}	ω_{4d}	ω_{5d}
CE1 h1=0,01	256,8136	1585,7878	4350,5783	7960,7782	8316,4379
CE1 h1=0,02	257,294	1584,3958	4342,3153	7969,6967	8304,3929
CE2 h1=0,001	630,2937	3910,4816	10744,619	19569,673	20563,933
CE2 h1=0,009	621,5944	3903,1046	10646,6267	19300,9826	20543,8155

Verificou-se alguma dificuldade na convergência dos resultados das vigas com dano, para o caso CE1. Por esse motivo, e tendo em conta a regularidade e linearidade dos resultados até agora obtidos, para as excitações às frequências $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_1/3$ apenas são apresentadas as respostas para o caso CE2, cuja convergência à primeira frequência natural foi garantida com e sem dano. Como referido no final do capítulo anterior, mostram-se ainda os resultados obtidos para uma excitação ao segundo modo de vibração para o caso CE1, onde foi atingida convergência para a segunda frequência natural, ω_{2d} . O objectivo é verificar se realmente existe alguma hipótese de o entalhe fechar.

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

Na figura 6.20 são expostas as respostas no tempo para o caso CE2.

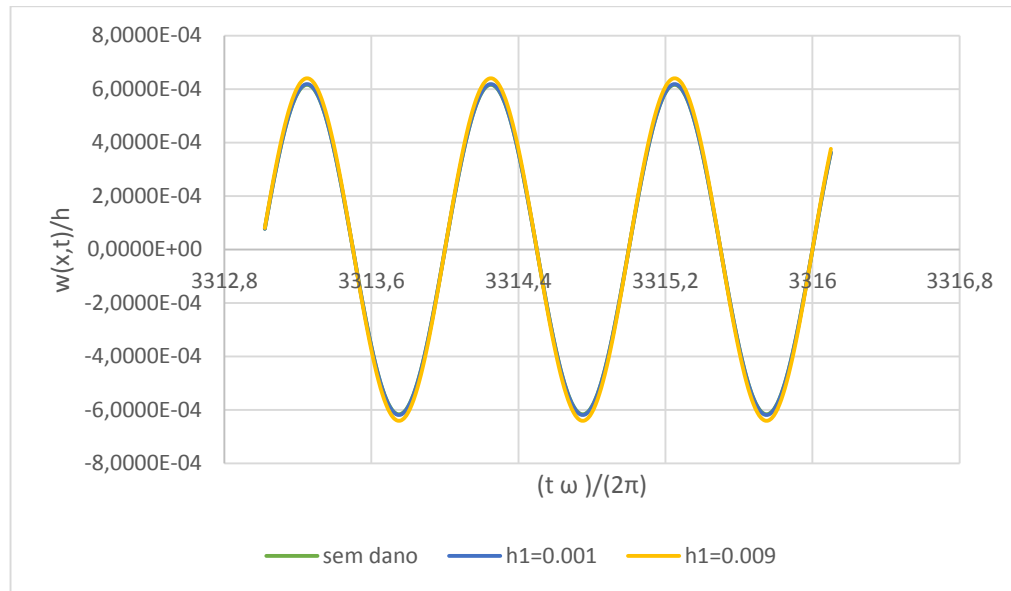


Figura 6. 20 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

Tal como para vigas duplamente encastradas, a presença do entalhe à superfície não parece influenciar a resposta do sistema, para uma solicitação de baixa frequência. O aumento de amplitude provocado pela presença do entalhe é quase desprezável e apenas visível na extremidade do movimento, para o caso de maior profundidade. Em todos os casos, foi obtida uma resposta sinusoidal, simétrica em relação às amplitudes de deslocamento e aparentemente periódica, de traço uniforme e envelope plana. Estas são características comuns a sistemas lineares periódicos e por isso não esperados harmónicos da frequência base.

O comportamento linear da resposta para os sistemas com dano, indica que também nestes casos o entalhe não fecha, o que é comprovado pela seguinte figura, onde se mostra a posição dos pontos X_A e X_B , relativos às duas extremidades do entalhe, para o caso de maior dano. Observa-se, na figura 6.21, que a variação das posições dos dois pontos é imperceptível à escala do gráfico e que a posição relativa entre eles se mantém praticamente constante.

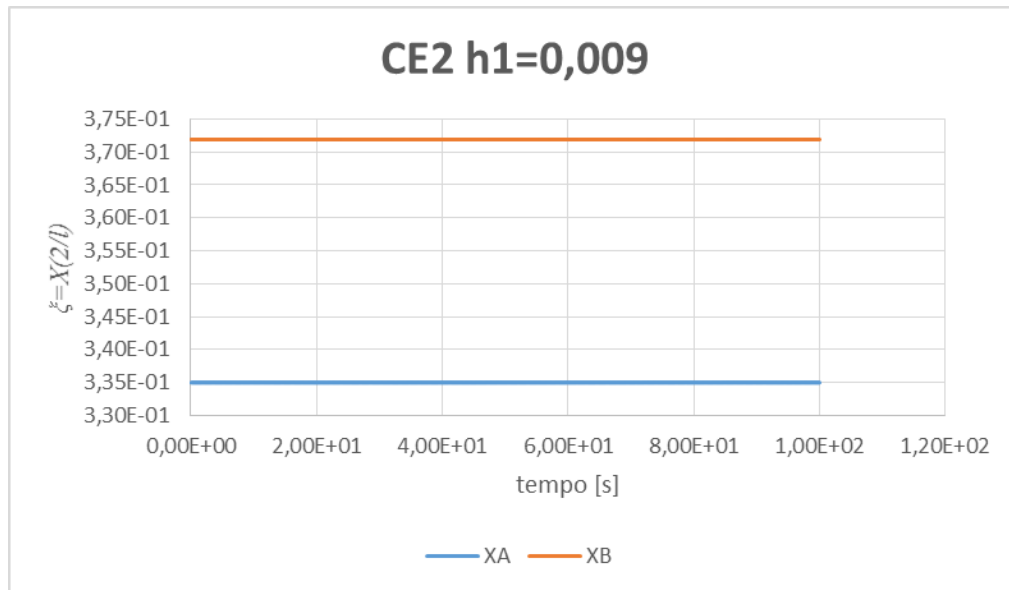


Figura 6. 21 - Posição dos pontos XA e XB. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

Projecção no plano de fase

As soluções, da figura 6.22, caracterizam-se por uma órbita fechada simétrica e não distorcida, de aparência elíptica. Confirma-se que a resposta é linear periódica, em regime permanente, qualquer que seja o estado do sistema. A não distorção da órbita implica que não deverão existir harmónicos no espectro de amplitudes.

Verifica-se que, no que à resposta dinâmica diz respeito, para uma excitação de baixa frequência, não existe uma diferença significativa entre as respostas de um sistema intacto e de um sistema com um entalhe, que implica uma remoção de material, o que torna difícil a identificação deste tipo de dano. Ao mesmo tempo, será plausível concluir que para excitações de baixa frequência existirá uma maior segurança, do ponto de vista da integridade do sistema.

Secção de Poincaré

A figura 6.23 apresenta a intersecção da resposta com a secção de Poincaré.

Quer para o sistema intacto como para os sistemas com dano, se verifica que a intersecção com a secção de Poincaré corresponde a um ponto discreto. Novamente se confirma que as respostas são periódicas de apenas uma frequência e, consequentemente, linear periódicas. Verifica-se também que variação da posição os pontos relativos aos casos com e sem dano é ínfima, quase desprezável, e de difícil identificação.

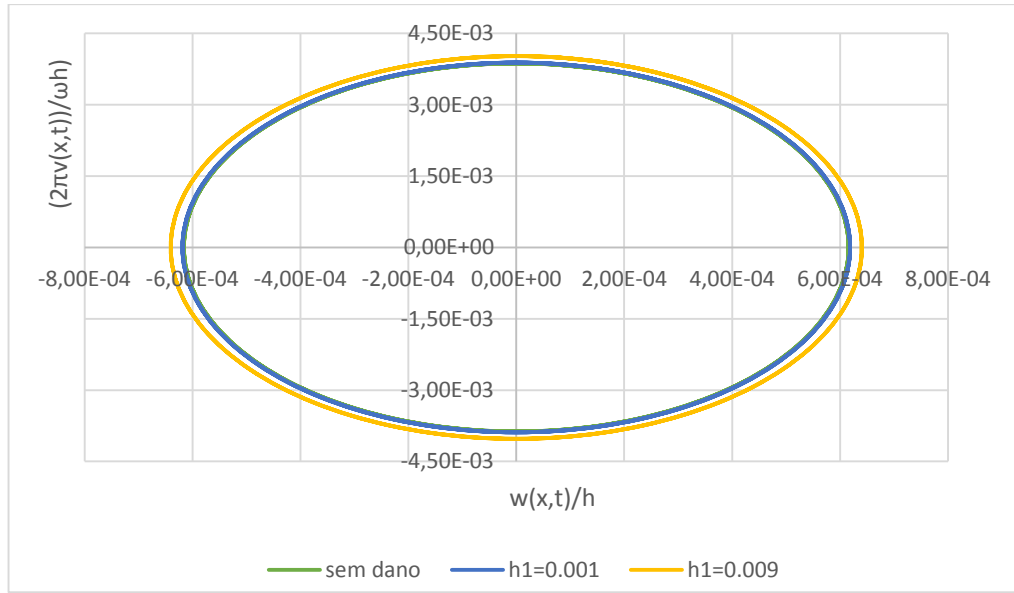


Figura 6. 22 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

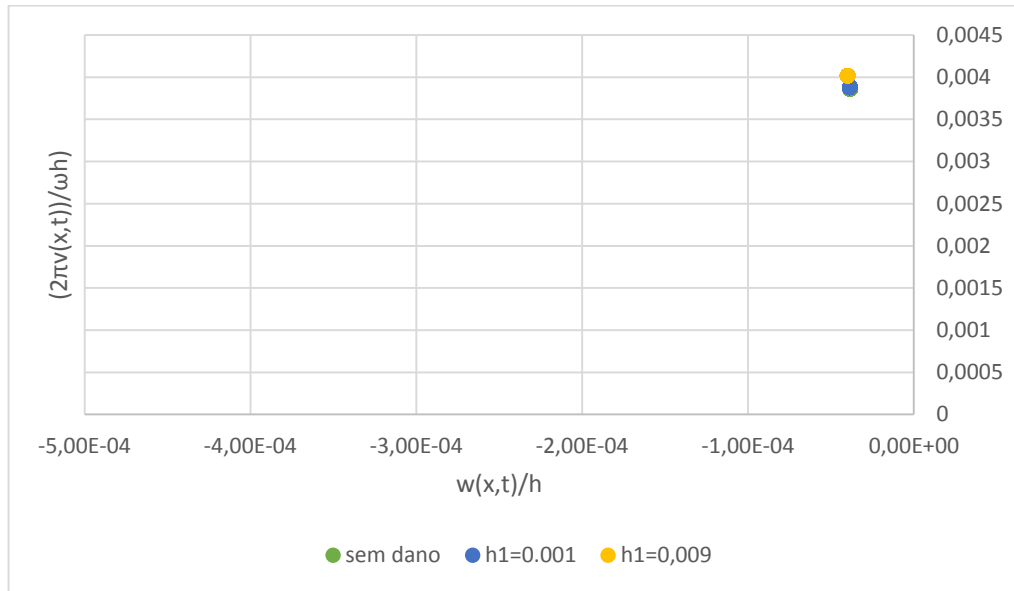


Figura 6. 23 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

Espectro de amplitudes

Na figura 6.24, o espectro de amplitudes da viga com entalhe confirma as conclusões já obtidas. Todos os sistemas são lineares e periódicos de apenas uma frequência base e as suas respostas não sofrem a influência de harmónicos. Verifica-se de novo a existência de “leakage”. As figuras seguintes são referentes ao espectro de amplitudes das vigas intacta e de maior profundidade de entalhe.

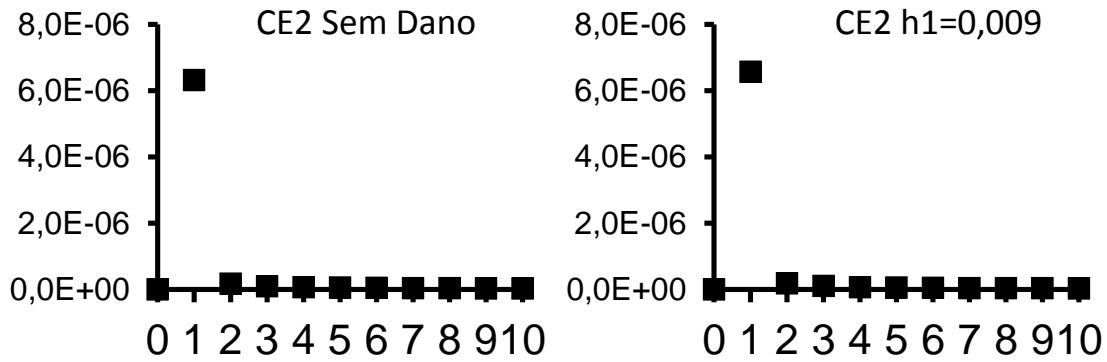


Figura 6. 24 – CE2 Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Resposta no tempo

A figura 6.25 mostra as respostas no tempo para o caso CE2 sem dano e para duas profundidades de entalhe.

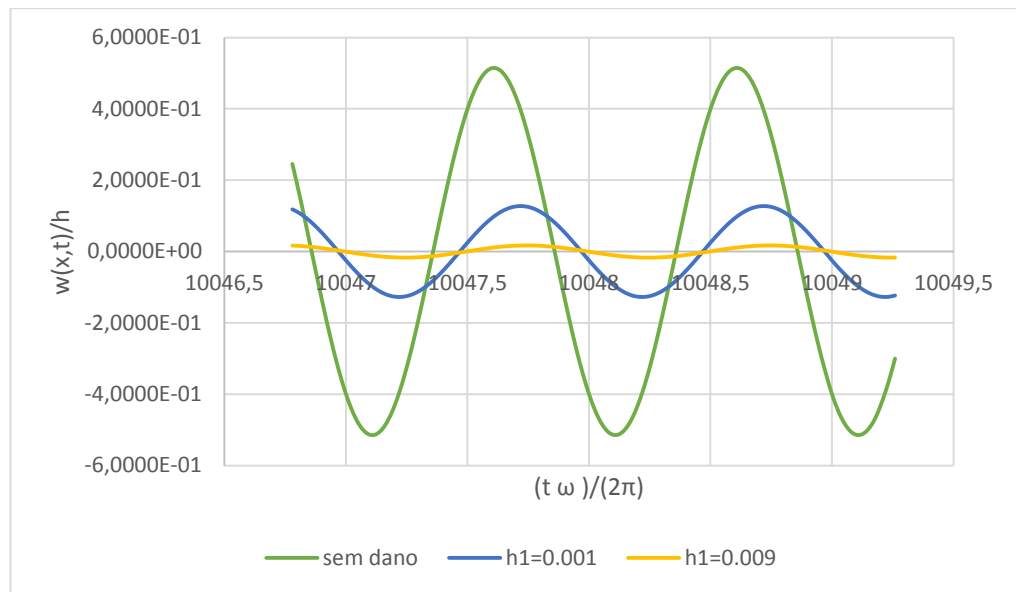


Figura 6. 25 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Para uma excitação à primeira frequência natural da viga intacta, verifica-se que também para vigas encastradas as respostas apresentam características muito semelhantes entre si. Observam-se respostas sinusoidais, periódicas, simétricas em relação às amplitudes de deslocamento e de traço uniforme e envelope plana. Esperam-se, em todos os casos, sistemas lineares periódicos, sem harmónicos da frequência base.

No que respeita às amplitudes do movimento, estas são tanto maiores quanto menor a profundidade do entalhe e claramente distintas. Ainda assim, são da mesma ordem de grandeza.

A justificação para este comportamento, tal como indicado para o caso de vigas duplamente encastradas, está relacionada com a pequena diminuição das frequências naturais, causada pela presença do entalhe. Pela equação (6.1), fica claro que a redução de massa causa por este tipo de dano compensa a queda de rigidez do sistema. Pela proximidade entre as frequências naturais, conclui-se que em todos os casos a excitação é próxima da zona de ressonância, o que explica um desfaseamento entre respostas um pouco inferior a $\pi/2$ rad.

O comportamento linear do sistema permite concluir também que o entalhe não fechará durante o tempo de excitação, como é explícito pela figura seguinte, que mostra que a posição relativa entre as duas extremidades do entalhe se mantém praticamente constante ao longo tempo, para ma profundidade de entalhe de 9mm.

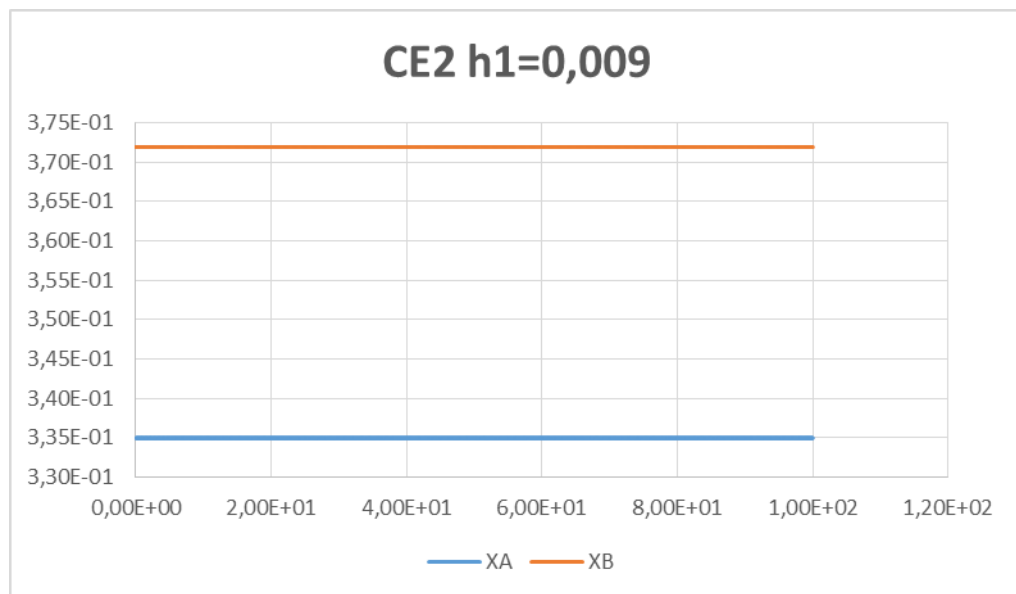


Figura 6. 26 - Posição dos pontos XA e XB do entalhe. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Projecção no plano de fase

A figura 6.27 apresenta as projecções no plano de fase do caso de estudo, para as diferentes profundidades do entalhe. As projecções caracterizam-se por órbitas fechadas, não distorcidas e de aparência elíptica, o que indica que as soluções são lineares periódicas de uma frequência e ausência de harmónicos no espectro de amplitudes. Verifica-se também simetria das órbitas no plano de fase e amplitudes distintas, em concordância com o verificado nas respostas no tempo, tanto maiores quanto menor a profundidade do entalhe.

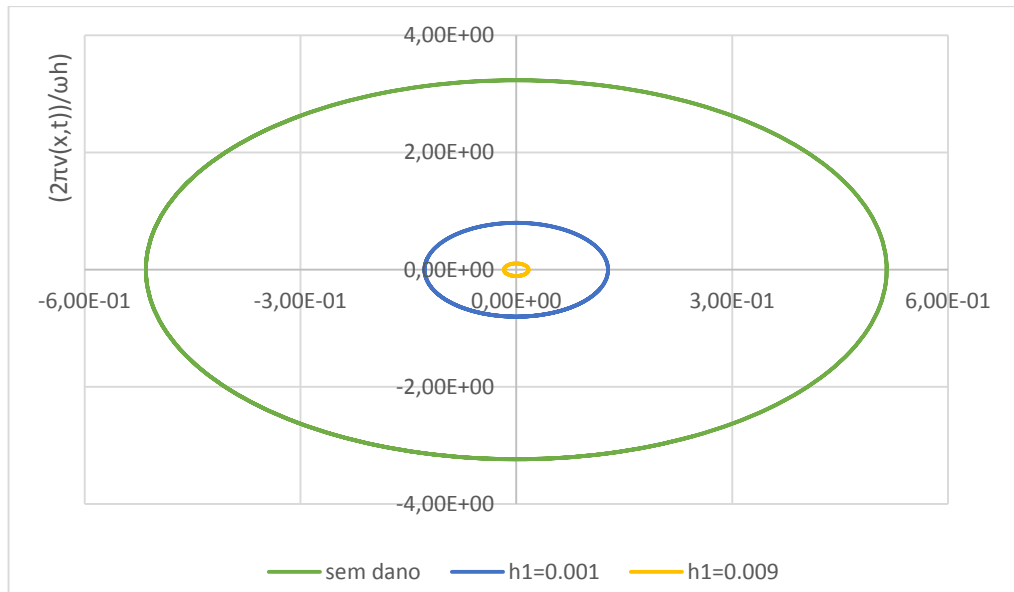


Figura 6. 27 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Secção de Poincaré

Como se observa na figura 6.28, a intersecção das respostas no tempo com a secção de Poincaré é, em todos os casos, um ponto discreto. Confirma-se que as respostas são periódicas de uma só frequência base, como tal como já se tinha concluído pelas anteriores representações gráficas. Observa-se ainda um afastamento dos pontos relativos ao dano, em relação ao sistema intacto, resultante da diferença de amplitudes de resposta.

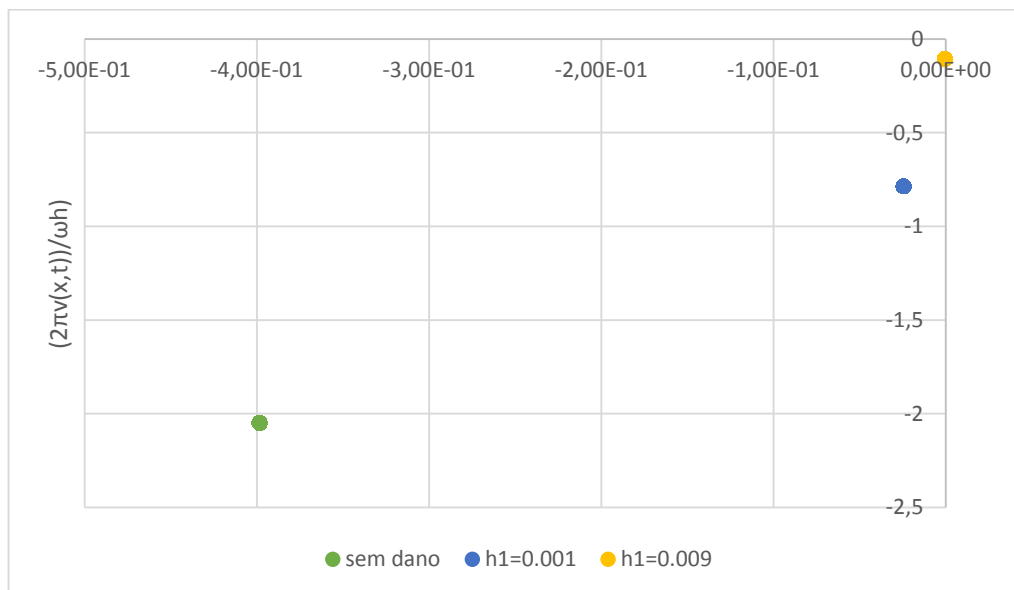


Figura 6. 28 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Espectro de amplitudes

Os espectros de amplitudes agora apresentados, na figura 6.29, mostram a existência de apenas uma frequência na resposta dos sistemas, mostrando que todas as soluções são lineares periódicas. É visível a existência de um pequeno pico, de amplitude desprezável, no segundo harmónico, mesmo no caso da viga intacta, o que leva a concluir que se trata novamente de uma caso de “leakage”.

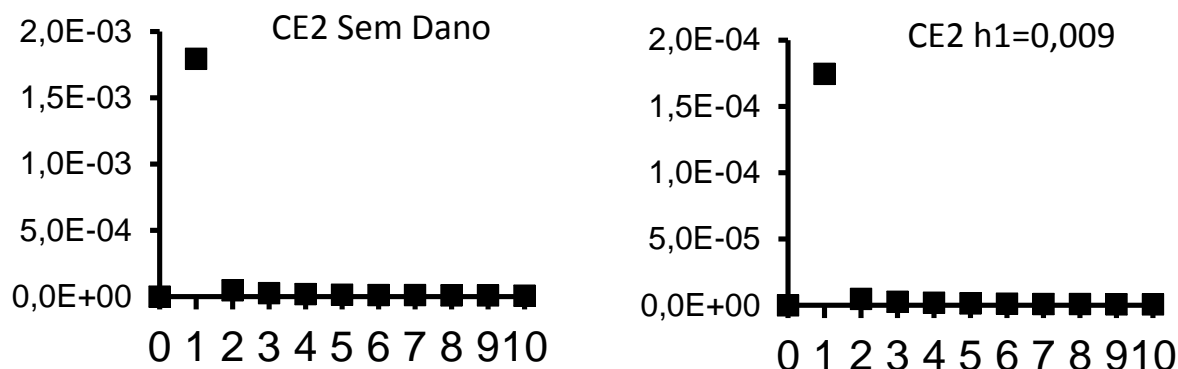


Figura 6. 29 - CE2 Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga encastrada. $\omega = \omega_1$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_{2d}$

Os resultados até agora obtidos são referentes a excitações à primeira frequência natural de vibração. A distribuição espacial dos pontos de cada viga, ao longo do tempo, é modelada pela primeira forma natural de vibração. Para vigas duplamente encastradas, o primeiro modo caracteriza-se por amplitudes de deslocamento máximas no centro da viga, posição para a qual o declive da tangente é nulo e, por isso, também será a rotação. Para vigas encastradas-livres, a máxima amplitude e rotação dão-se na extremidade livre. Em nenhum dos casos analisados se observou um comportamento bilinear do entalhe.

Com o objectivo de avaliar até que ponto será seguro afirmar que, em condições normais, o entalhe nunca fechará, introduz-se uma excitação à segunda frequência de vibração de uma viga encastrada-live. A existência de um nodo, ponto onde o deslocamento é nulo mas a rotação da viga é máxima, poderá ser um factor suficiente para promover o fecho do entalhe. De forma a potenciar este efeito a frequência de excitação será igual à segunda frequência natural da viga CE1 com entalhe, ω_{2d} . De início assumir-se-á que a frequência de excitação é correspondente a um entalhe sempre aberto. Caso se verifique algum comportamento bilinear, ou tendência para tal, no sentido em que as amplitudes de resposta a esta excitação não tenham

um aumento considerável, então ajustar-se-á a frequência de excitação à segunda frequência natural bilinear do sistema (equação 6.5).

Resposta no tempo

Na figura 6.30, apresenta-se a representação gráfica das respostas no tempo para a viga intacta e para uma profundidade de entalhe $h_1=0,02m$.

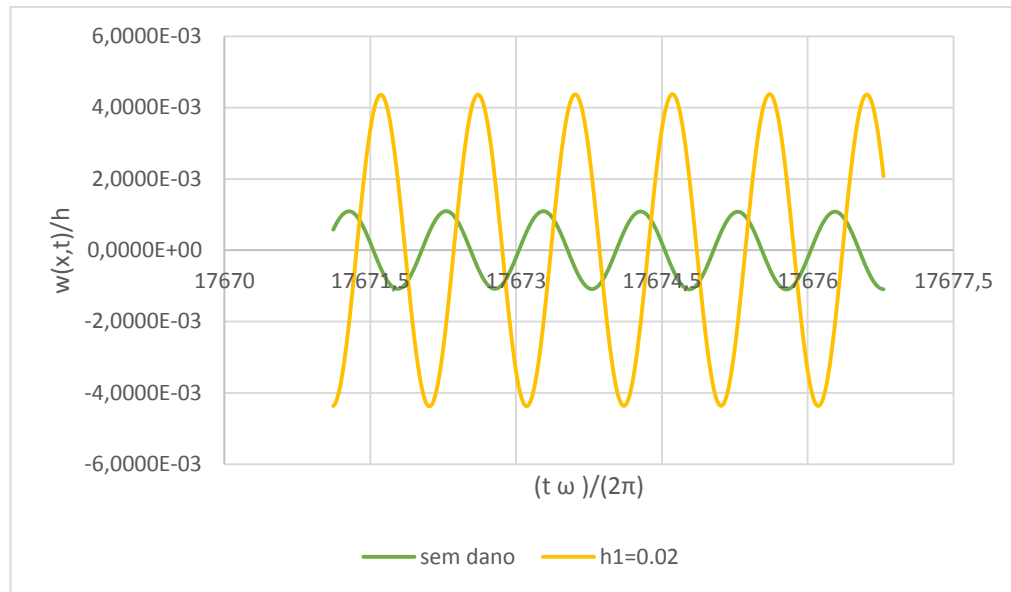


Figura 6. 30 – CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

Verifica-se novamente que a presença do entalhe não aparenta influenciar a linearidade da resposta no tempo. Tanto na presença de dano como na sua ausência, a resposta é sinusoidal, simétrica em relação à amplitude de deslocamento e aparenta ter um período definido. Aliás, a expectável periodicidade da resposta é reforçada pelo traço uniforme que esta exibe e pela envelope plana. Não são esperados harmónicos da frequência base e tudo indica que o sistema, antes e após abertura do entalhe, será linear periódico, em regime permanente.

Tal como esperado para uma excitação próxima da ressonância, a amplitude da resposta da viga com entalhe é claramente superior à da intacta. Note-se, contudo, que ambas são da mesma ordem de grandeza, o que deixa antever que, na verdade, as frequências de ressonância das duas vigas são bastante próximas à frequência de excitação. Outra indicação dessa possibilidade é o desfasamento não nulo e inferior a $\pi/2$ rad, entre as duas respostas, o que indica uma razão de frequências próxima da unidade, para os dois sistemas. A justificação para esta proximidade de frequências foi já abordada no subcapítulo 6.2.1.1, para a excitação $\omega = \omega_1$.

A figura 6.31 explicita a posição relativa, ao longo do comprimento da viga, das extremidades do entalhe, X_A e X_B . Novamente se mostra que a posição relativa destes pontos se mantém praticamente constante no tempo e que o entalhe não fecha.

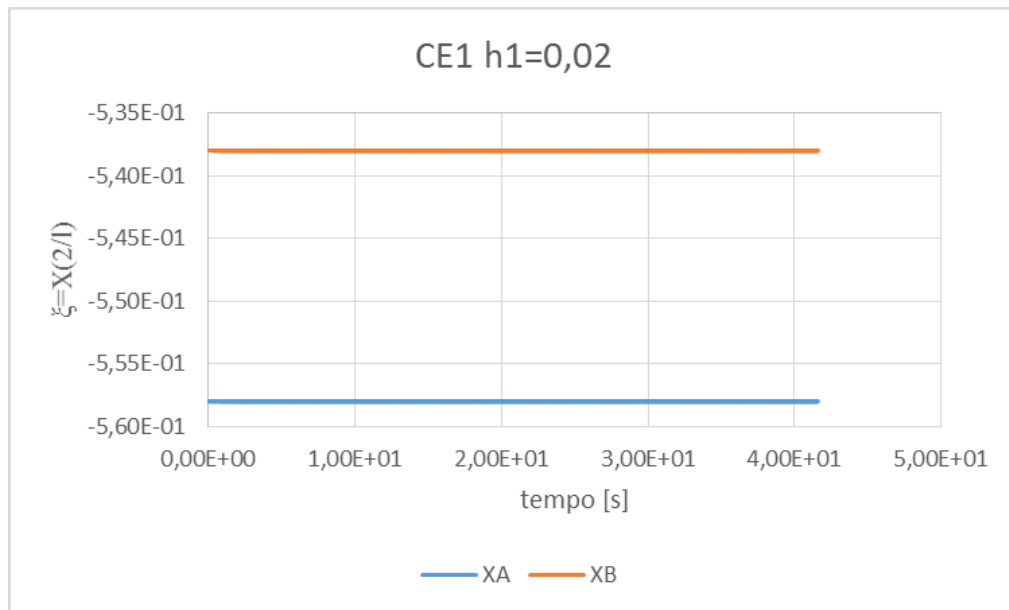


Figura 6. 31- Posição dos pontos X_A e X_B . Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

Projecção no Plano de Fase

A projecção no plano de fase, da solução dos sistemas intacto e com entalhe resulta em órbitas fechadas e de aparência elíptica, o que indica que os sistemas são periódicos e apenas contém uma frequência. A simetria e a não distorção das órbitas mostram que o sistema também é linear, mesmo na presença do entalhe, e como tal não se esperam harmónicos da frequência fundamental. As maiores dimensões da órbita relativa à viga com dano são provenientes da maior proximidade da zona de ressonância destas vigas à frequência de excitação. A figura 6.32 apresenta as projecções no plano de fase do caso CE1.

Secção de Poincaré

A figura 6.33 mostra que a intersecção com a secção de Poincaré é, tanto para a viga intacta como para a viga com entalhe, um ponto discreto, o que implica que as respostas sejam periódicas sem duplicação de período, tal como confirmado nas representações gráficas anteriores. Confirma-se que o sistema é linear periódico, antes e depois da abertura do entalhe,

em regime permanente. Note-se ainda o afastamento entre os dois pontos, resultante da diferença de amplitudes de resposta entre as vigas com e sem dano.

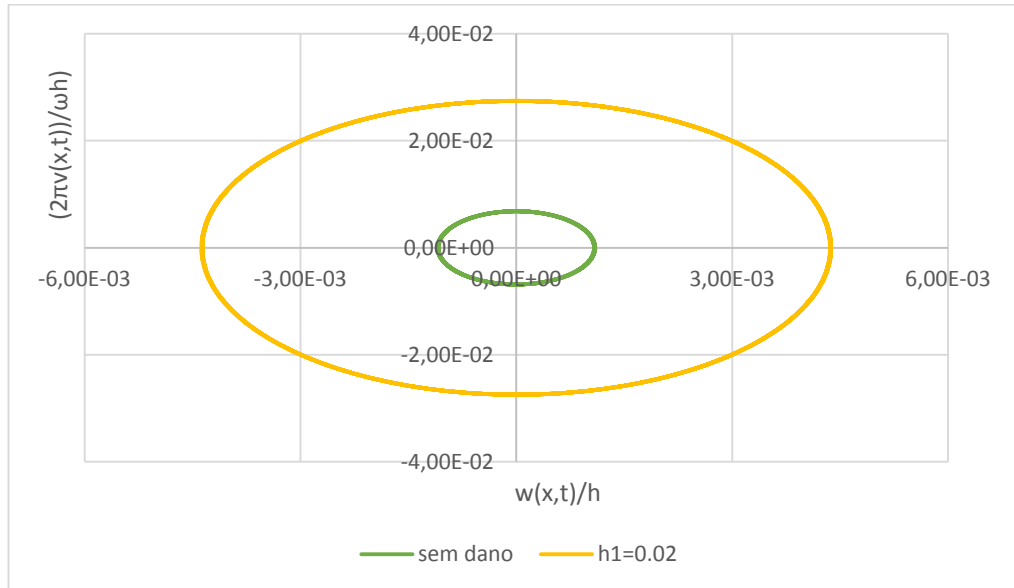


Figura 6. 32 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

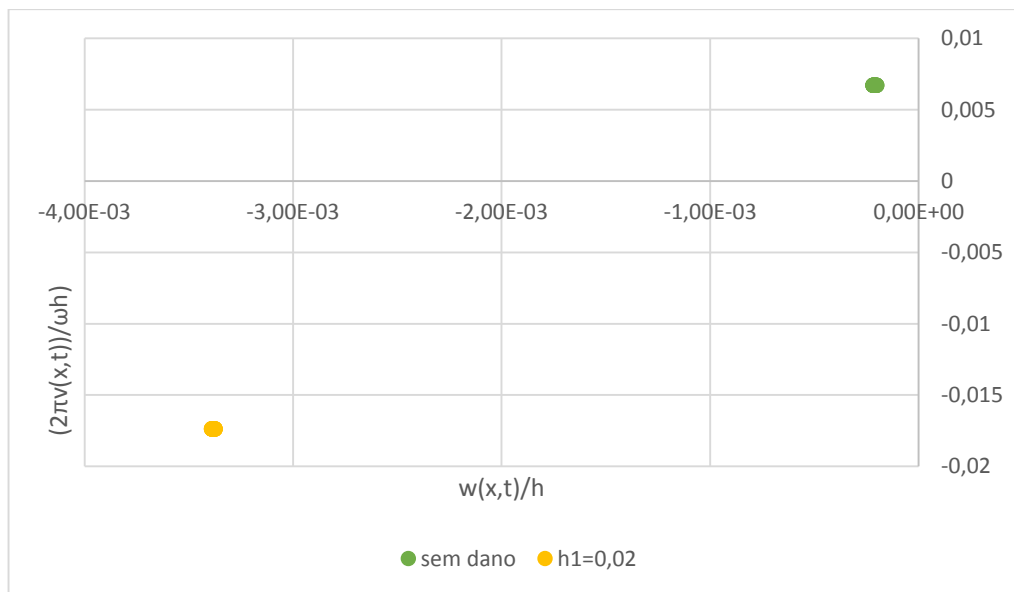


Figura 6. 33 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

Espectro de amplitudes

A figura 6.34 mostra o espectro de amplitudes para a viga sem entalhe e com entalhe. Verifica-se a existência de apenas uma frequência na resposta dos sistemas, ou seja, conclui-se que todas as soluções são lineares periódicas. É visível a existência de um pequeno pico, de

amplitude desprezável, no segundo harmónico, mesmo no caso da viga intacta, que se trata novamente de uma caso de “leakage”.

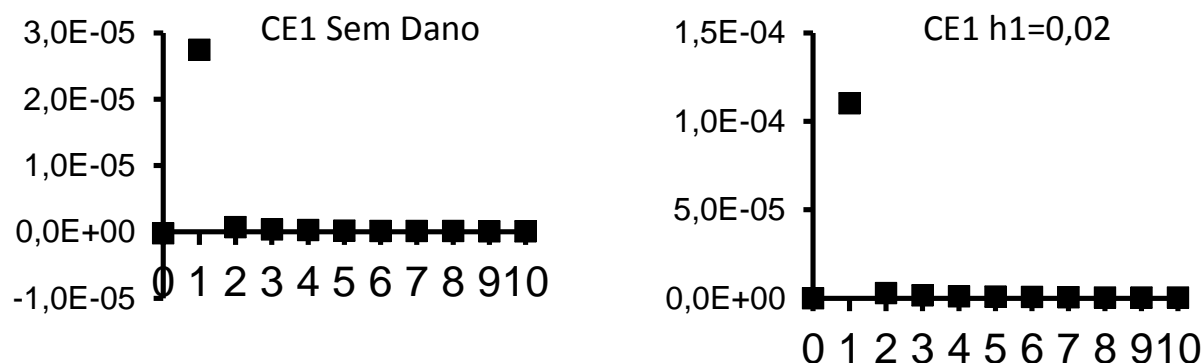


Figura 6. 34 - CE1 Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

As respostas obtidas para uma excitação à segunda frequência natural da viga com dano mostram um comportamento linear do sistema, independentemente do seu estado. A regularidade e linearidade das respostas, mais o facto de tanto a viga intacta como a viga com entalhe serem excitadas próximas da ressonância e a posição relativa entre as extremidades do entalhe ser praticamente constante, leva a concluir que entalhe deverá permanecer aberto.

6.2.2 Resposta em Regime Transiente

Neste subcapítulo apresentam-se e analisam-se as respostas dos sistemas nos instantes após a abertura do entalhe. Devido às características pouco regulares dos movimentos transientes, e de forma a obter resultados o mais fiáveis possível, foi garantido que todos os sistemas, antes da ocorrência de dano, evoluíram até um estado de regime permanente. Embora o comportamento transiente seja de duração bastante curta, este apresenta particularidades interessantes que poderão conter informação útil na caracterização das respostas na presença de dano, principalmente em sistemas de muito baixo amortecimento. O conceito de sistema não amortecido é uma idealização. Na realidade, existirá sempre dissipação de energia em qualquer movimento, resultante da interacção entre determinado sistema dinâmico e o meio viscoso que o rodeia e do próprio comportamento material. Devido a dificuldade em medir e determinar com exactidão este tipo de amortecimento, frequentemente se introduz o conceito de amortecimento proporcional, como já referido na formulação do método. Deste tipo de amortecimento, resultam, nos casos de estudo aqui apresentados, valores de baixa ordem de

grandeza que aproximam um sistema ao caso ideal de amortecimento nulo. Considere-se a seguinte expressão da resposta total para um sistema de um grau de liberdade amortecido, tal como apresentada por J. Dias Rodrigues [35]:

$$w(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) + \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (6.3)$$

onde ξ é a razão de amortecimento do sistema, ω_n a frequência natural de vibração, ω_d a frequência natural amortecida do sistema, ω a frequência de excitação, A_1 e A_2 duas constantes determinadas pelas condições iniciais do movimento, F a amplitude de força, k a constante de rigidez do sistema de um grau de liberdade, β a razão de frequência e ϕ o ângulo de fase entre excitação e resposta.

Embora uma viga seja considerada um meio contínuo e a sua discretização em elementos finitos, um sistema de n graus de liberdade, a expressão (6.3) continua a ser valiosa por apresentar informação útil em relação ao comportamento do sistema, aliado à sua simplicidade. O primeiro termo da expressão é referente à resposta livre do sistema, cujo efeito se dissipa no tempo segundo uma evolução exponencial. A dissipação será tanto mais rápida quando maior a razão de amortecimento. Para um sistema não amortecido, isto é, para $\xi = 0$, a equação (6.3) toma a seguinte forma:

$$w(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F}{k} \frac{1}{|1 - \beta^2|} \cos(\omega t - \phi) \quad (6.4)$$

Verifica-se um movimento de duas frequências, a uma igual à frequência de excitação, ω , e uma igual à frequência natural de vibração, ω_n . A resposta apresentada revela, para sistemas não amortecidos, características comuns às de um movimento quase periódico de duas frequências incomensuráveis. Duas frequências são ditas incomensuráveis se razão entre elas não pode ser expressa por um número racional. Na presença de amortecimento proporcional, de baixa intensidade, será de esperar que a resposta seja aproximada à definida na expressão (6.4) e que, embora se verifique um decaimento do transiente ao longo do tempo, esta apresente uma evolução suave no sentido do regime permanente, de duas frequências bem definidas.

Outro factor a ter em conta será a influência da razão de frequências, β , no tipo de resposta obtido.

Neste subcapítulo a análise das respostas será feita com recurso às mesmas representações gráficas utilizadas para o regime estacionário, com excepção do espectro de amplitudes que apenas é válido para respostas com um único período. São apresentadas a representação gráfica da resposta no tempo, a projecção no plano de fase e a intersecção das respostas com a secção de Poincaré.

6.2.2.1 VIGAS DUPLAMENTE ENCASTRADAS

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

As figuras 6.35 e 6.36 mostram a resposta no tempo dos sistemas CE1 e CE2, no instante de abertura da fenda, para $t_{dano} = 10s$. Os casos analisados serão sempre referentes à maior profundidade de entalhe.

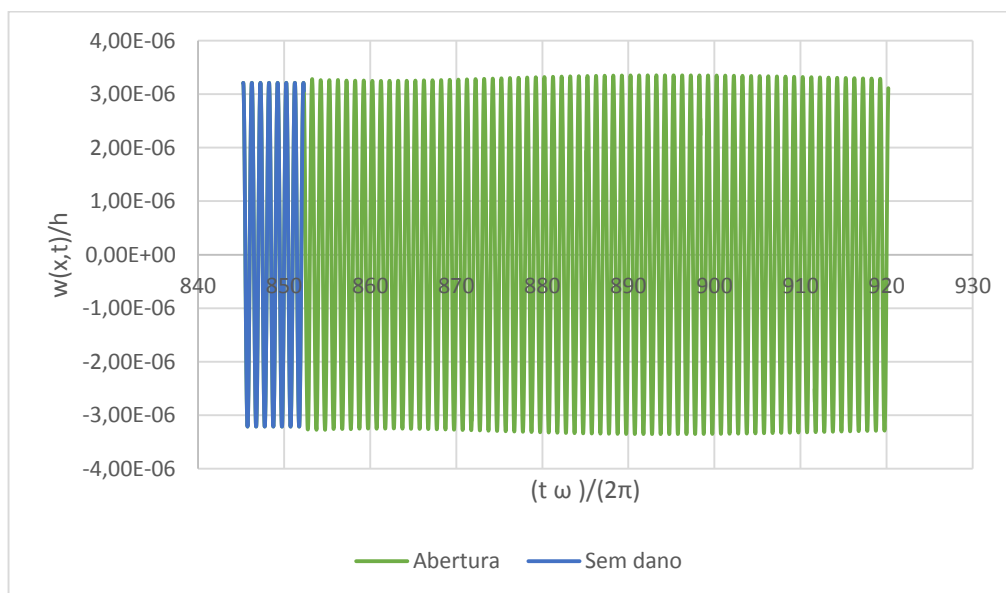


Figura 6. 35 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

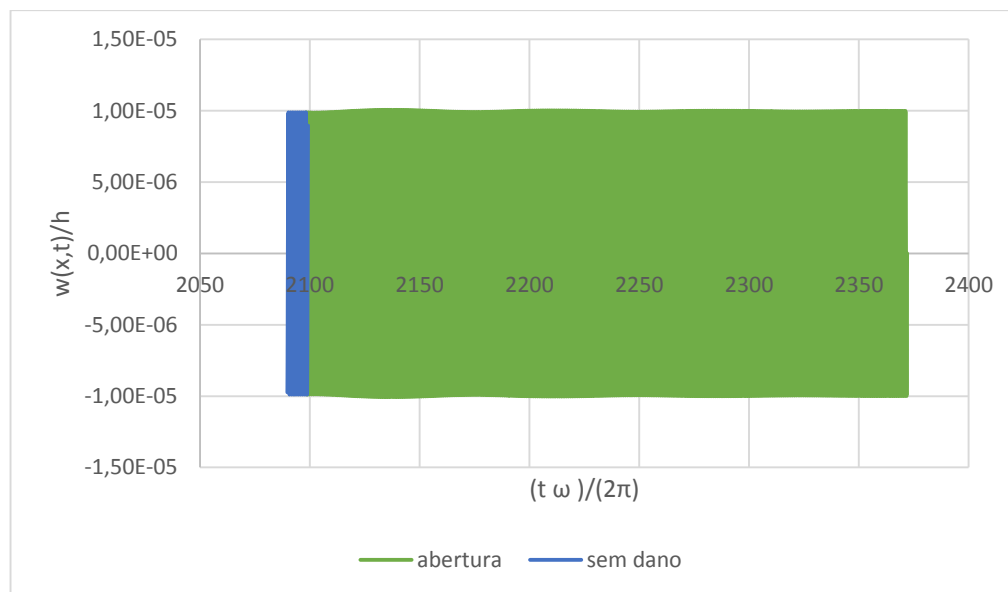


Figura 6. 36 – CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Verifica-se um aumento muito pequeno de amplitude da resposta, após abertura do entalhe, o que leva a que seja bastante difícil a detecção de dano pela medição da amplitude da resposta vibratória do sistema. A resposta mostra, tanto no caso CE1 como no CE2, um transiente muito discreto e de curta duração, quando comparado com os resultantes da abertura de uma fenda bilinear, mostrados mais à frente. Identificam-se uma frequência rápida e uma outra bastante mais lenta, que durará até que a que resposta livre se dissipe. Os resultados não são de todos inesperados, pois a análise em regime permanente já havia mostrado que a presença de um entalhe não afecta a linearidade do sistema, o que implica que o desequilíbrio causado pelo sua abertura também não será significativo. Ainda assim, seria de esperar que a frequência lenta fosse referente à de excitação, pois neste caso $\beta < 1$, mas verifica-se o oposto.

A resposta transiente resultante causada pelo entalhe é bastante ordenada e, além disso, apresenta simetria. O movimento é caracterizado por oscilações temporárias, de duas frequências, que se aproximam de uma solução quase – periódica [20]. Curiosamente, a intensidade do transiente aqui observada é bastante menor do que aquele que se verifica quando o sistema parte do repouso com o entalhe aberto. Este fenómeno pode-se explicar precisamente com o facto de partir do repouso, considerando condições iniciais nulas, implica que seja necessária uma maior libertação de energia para colocar o sistema em movimento, já despendida previamente quando o entalhe abre a meio do movimento.

Projecção no plano de fase

Após a abertura do entalhe, verifica-se um ligeiro aumento das dimensões das órbitas. Enquanto dura o transiente, as órbitas não fecham criando-se de novo uma nuvem de pequena amplitude em torno da posição de regime permanente. Outra solução no plano não seria de esperar uma vez que as respostas antes e depois da abertura do entalhe são quase sobrepostas. No entanto, e ao contrário da projecção no plano de fase para a excitação a frequência natural da viga intacta apresentada mais adiante, verifica-se que as órbitas são distorcidas pela acção do transiente, principalmente numa fase inicial, o que indica que deverão existir harmónicos, embora de curtíssima duração. Essa distorção é bem visível na figura 6.37. Note-se o muito curto intervalo de tempo necessário para que fossem feitos mais do que um ciclo pela resposta do sistema.

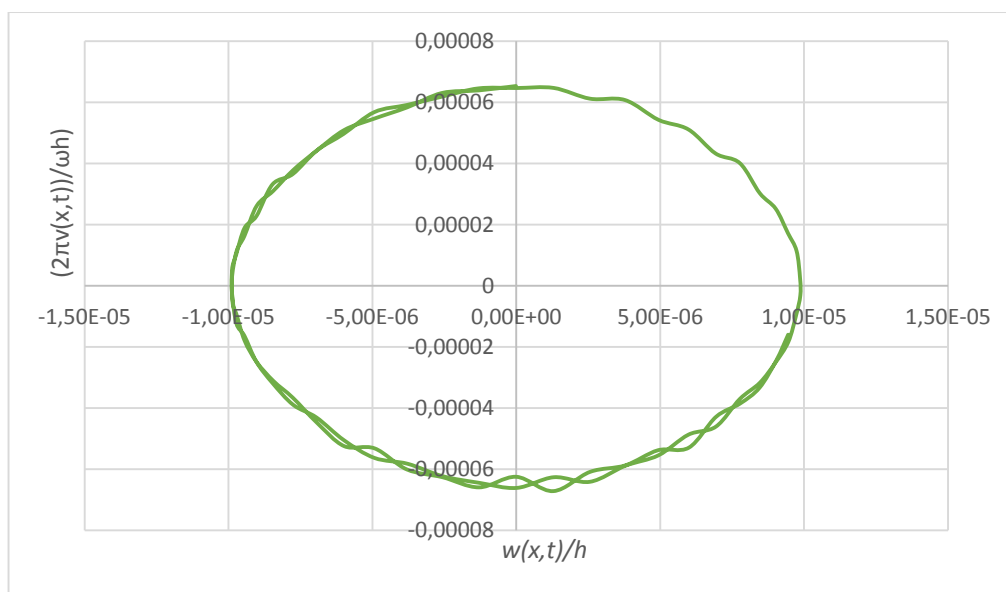


Figura 6. 37 – CE2 Plano de Fase $10,000283 < t < 10,008378$ [s]. Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$.

As projecções das soluções no plano de fase são expostas nas figuras 6.38 e 6.39, e mostram a evolução dos sistemas desde o estado de equilíbrio dinâmico anterior à abertura do entalhe até ao novo equilíbrio após dano.

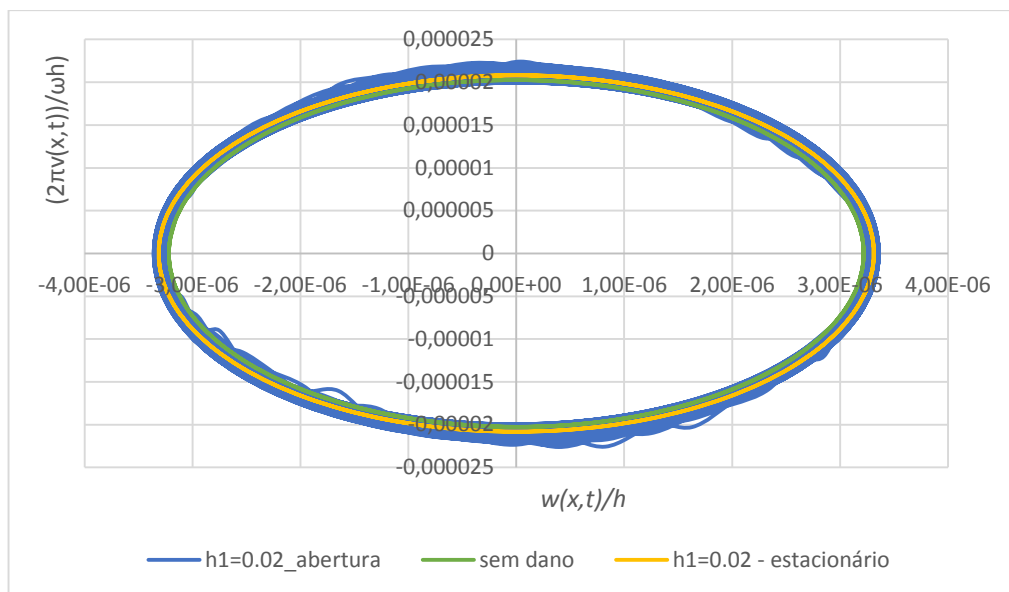


Figura 6. 38 - CE Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

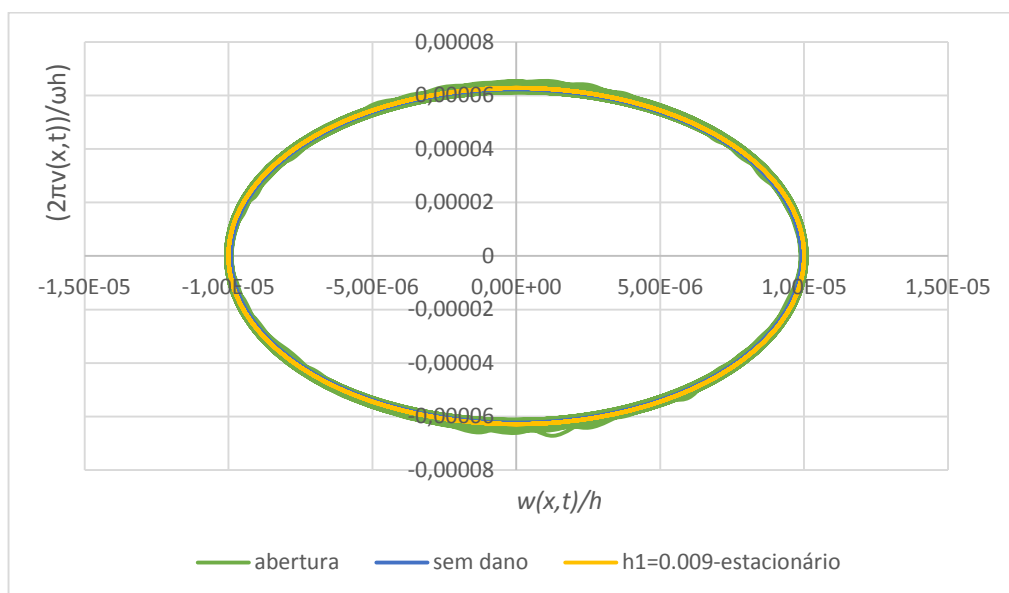


Figura 6. 39 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Secção de Poincaré

Pela observação das figuras 6.40 e 6.41, verifica-se que, após a abertura do entalhe, existe uma dispersão de pontos discretos que rapidamente se organiza numa evolução em espiral bastante regular e ordenada, até ao ponto referente ao regime permanente. Este comportamento mostra que a tendência para a resposta de cada sistema entrar num movimento descontrolado, possivelmente com algumas características de movimento caótico, é prontamente travada. Tal acontece devido à acção da excitação harmónica e à dissipação do transiente, que forçará o sistema para um movimento periódico.

A evolução em espiral, não fosse a dissipação do transiente ao longo do tempo, daria origem, muito provavelmente, a uma órbita fechada e regular, na secção de Poincaré, se todas as outras características dos sistemas se mantivessem constantes. Isto parece aproximar novamente as respostas a oscilações quási periódicas temporárias, de duas frequências.

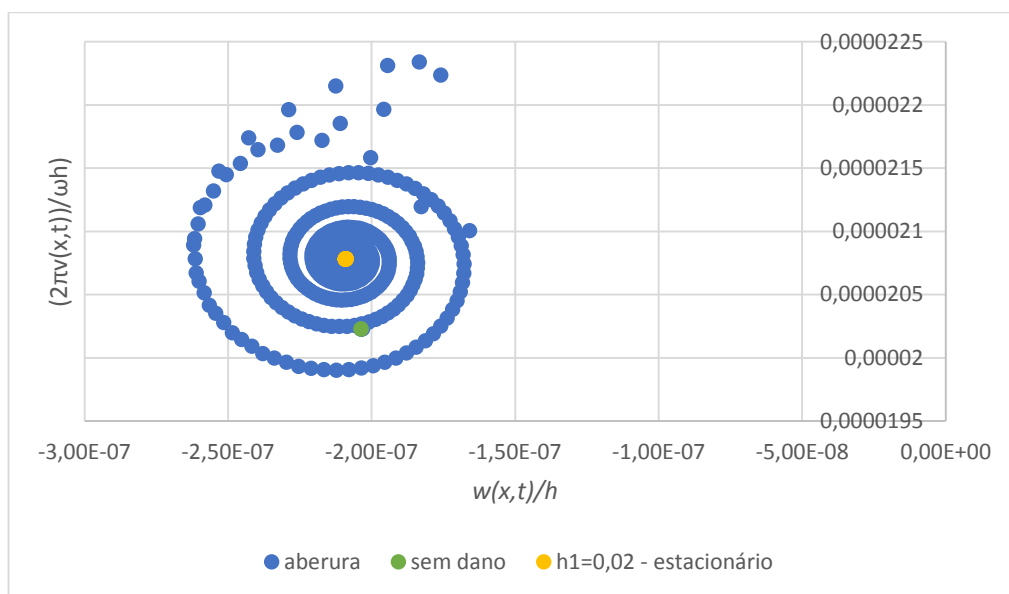


Figura 6. 40 – CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

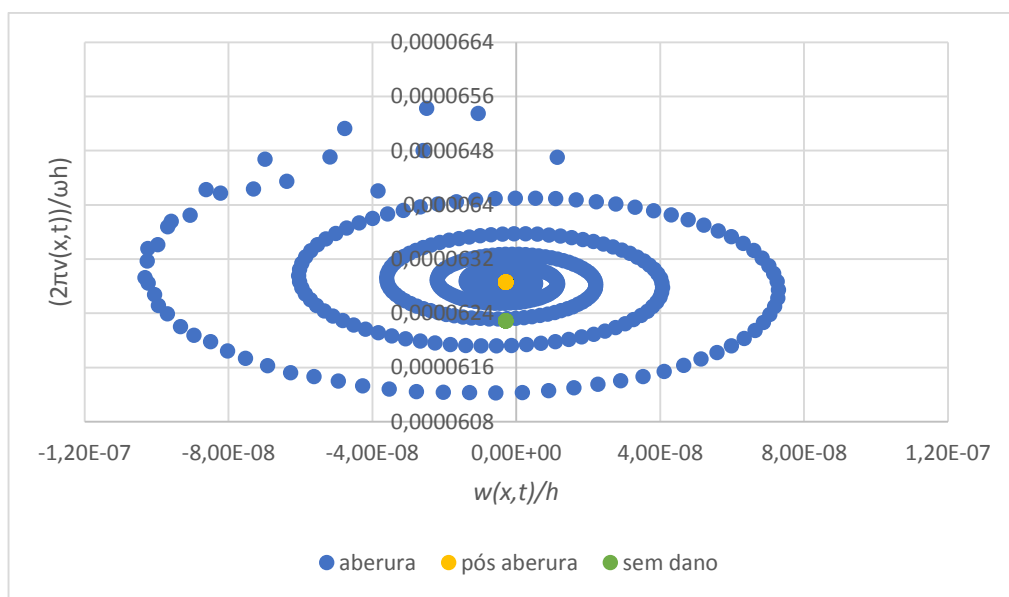


Figura 6. 41 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Resposta no tempo

A figura 6.42 apresenta a resposta no tempo, desde o instante de abertura, para o caso CE2. À escala do gráfico, apenas é visível a envelope da resposta, uma vez que os ciclos individuais são imperceptíveis. Verifica-se uma grande queda da amplitude de resposta, em virtude de a frequência de ressonância da viga com entalhe ser inferior à da intacta.

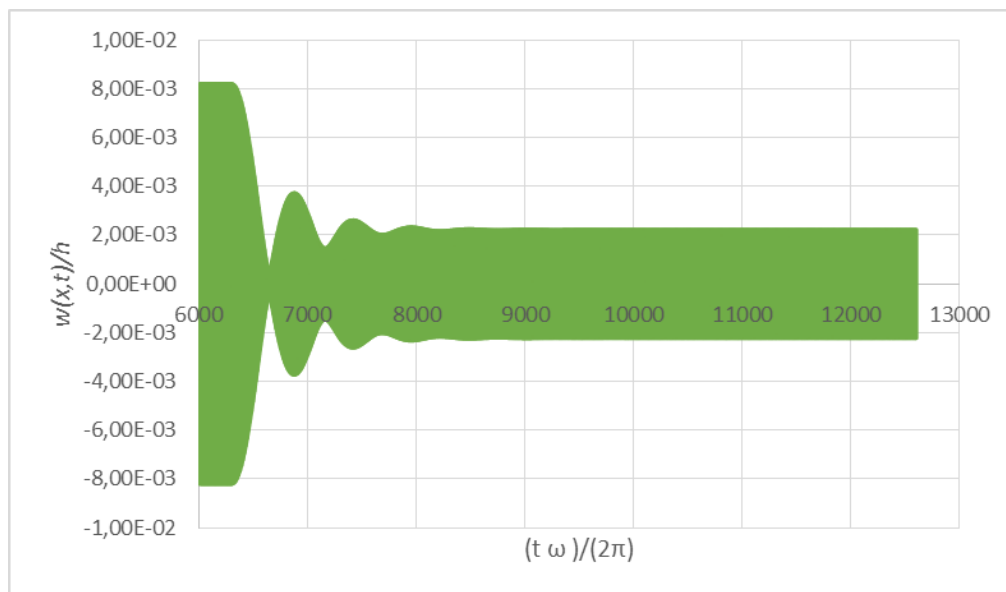


Figura 6. 42 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Na figura 6.42, a resposta no tempo apresenta duas fases distintas. Uma primeira onde a resposta é principalmente modelada por um decaimento das amplitudes bastante acentuado, e uma segunda fase para a qual as amplitudes variam entre intervalos bem definidos e onde a resposta é modela em amplitudes. Quando o entalhe abre a meio do movimento, verifica-se, após a queda inicial da resposta, que a amplitude do transiente dos sistemas danificados é superior à do transiente existente quando estes partem do repouso (não representado). Este efeito pode ser justificado pela grande queda de amplitudes num curtíssimo período de tempo, após a abertura do entalhe, que obrigará a uma repentina e elevada desaceleração do sistema até que seja atingida a amplitude mínima, que terá de ser libertada sob a forma de energia. Observa-se que o efeito é tanto maior quanto maior a razão de profundidade do entalhe. Tal poderá ser explicado pela conjugação de dois efeitos distintos, mas interligados. O primeiro está relacionado com a diminuição das frequências naturais na presença de dano. Quanto maior a profundidade do entalhe, maior será a queda da rigidez do sistema, que se sobrepõe ao efeito

da redução de massa, e de acordo com a equação (6.1), maior será a diminuição das frequências naturais. Nesse cenário, também a diferença entre as amplitudes de resposta, antes e depois, aumenta e como resultado a desaceleração imposta será também ela superior. O segundo efeito é a aplicação directa da segunda lei de Newton. Considerando a força de excitação igual em todos os casos, a redução de massa provocada pelo entalhe irá implicar obrigatoriamente uma maior aceleração do sistema.

Em todos os instantes, o transiente é bastante ordenado e não caótico. A figura 6.43 mostra que aos 0,3s após a abertura do entalhe no caso CE2, embora de amplitude em queda acentuada correspondente à primeira fase do movimento, a resposta apresenta um período bem definido e apenas é visível, na extensão do gráfico, uma frequência.

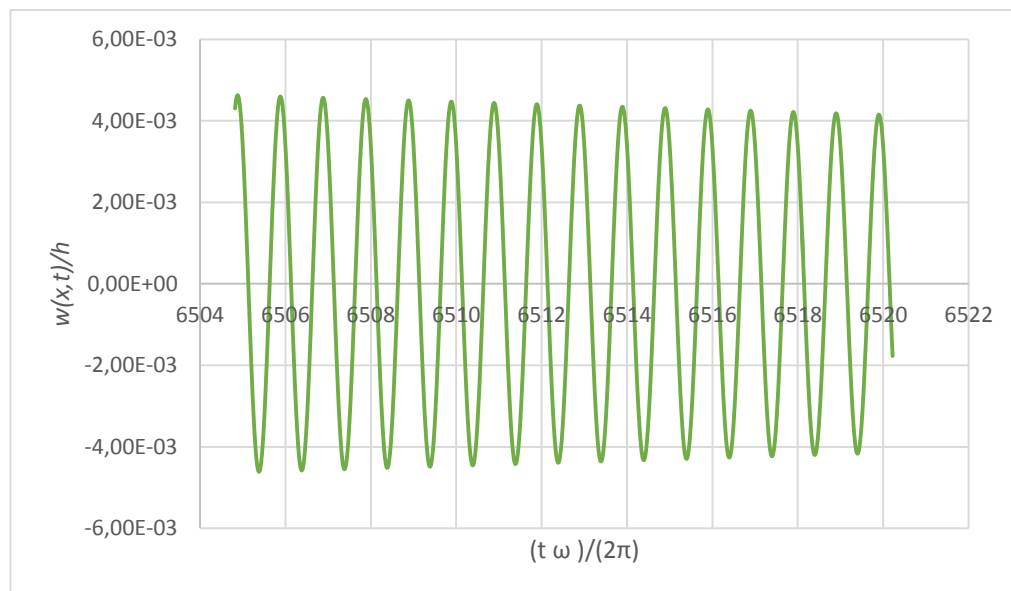


Figura 6. 43 – CE2 Resposta no Tempo 0,3s após abertura do entalhe. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$.

Na segunda fase do movimento, a resposta transiente é modelada em amplitude, onde a amplitude mínima se aproxima já à da resposta em regime transiente, e onde a amplitude máxima é imposta quase na totalidade pelo efeito transiente. Identificam-se duas frequências de resposta, uma rápida referente à excitação harmónica e outra lenta imposta pela resposta natural. Verifica-se uma evolução rápida dos sistemas no sentido do regime permanente. As figuras 6.44 e 6.45 mostram, para os casos CE1 e CE2, um reduzido efeito do transiente passados 5s e 3,3s após a abertura do entalhe, respectivamente.

Projecção no plano de fase

A abertura do entalhe não cria distúrbios significativos na resposta. Aliás, esses distúrbios são praticamente desprezáveis. Tal se verifica pela evolução em espiral do transiente, desde a resposta sem dano até ao regime permanente do novo estado dos sistemas. A homogeneidade e regularidade das órbitas deixa indicar que não deverão existir harmónicos de elevada intensidade. Tal pode ser observado nas figuras 6.46 e 6.47.

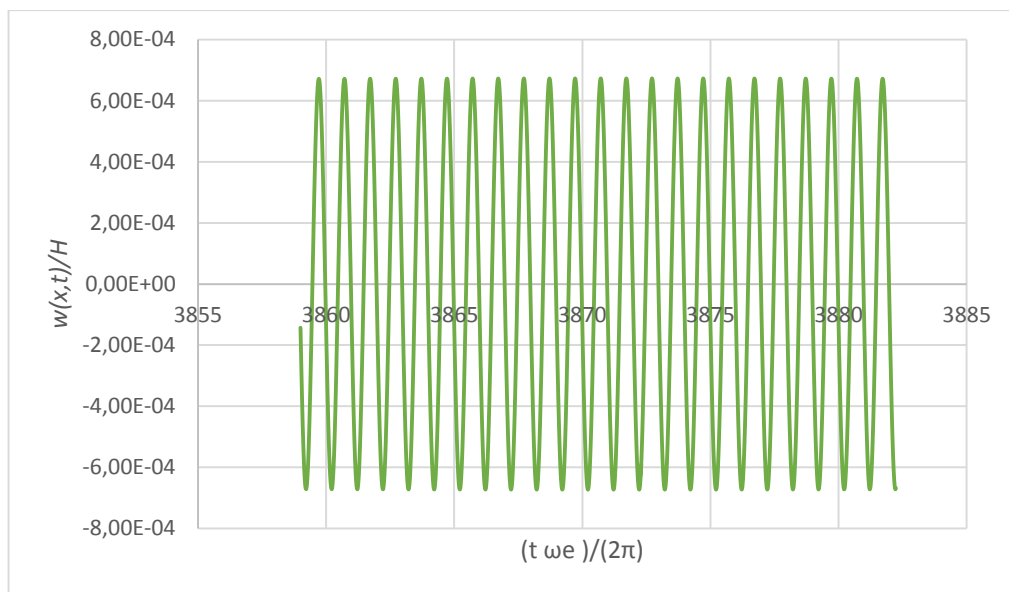


Figura 6. 44 – CE1 Resposta no Tempo 5s após abertura do entalhe. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$.

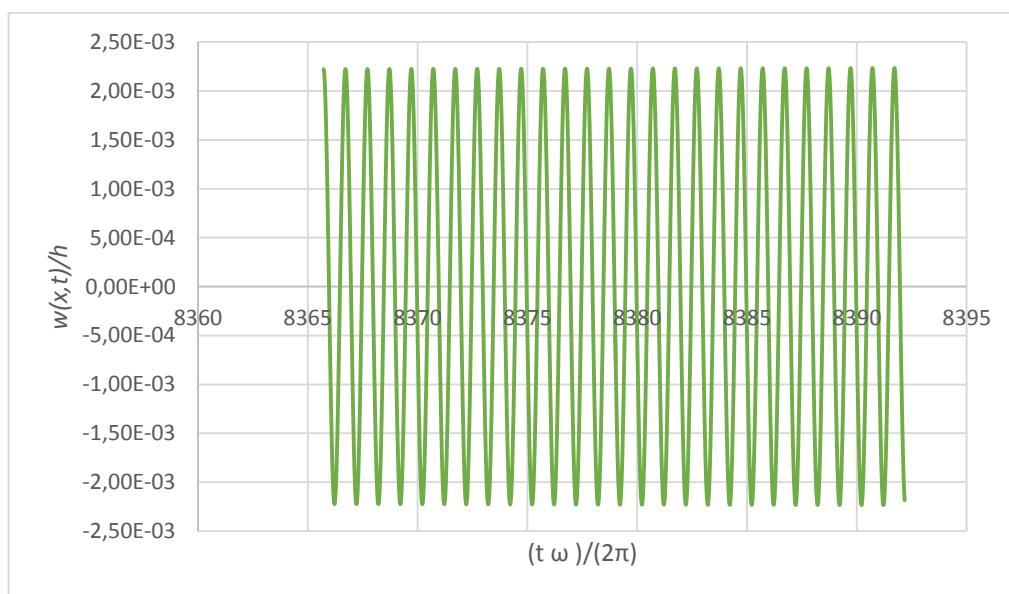


Figura 6. 45 – CE2 Resposta no Tempo 3,3s após abertura do entalhe. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$.

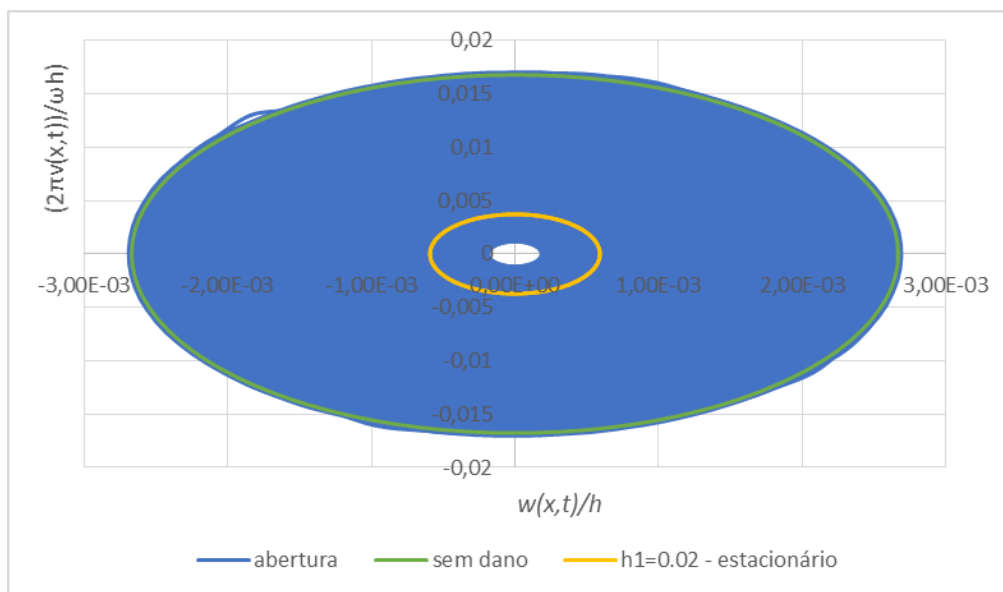


Figura 6. 46 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

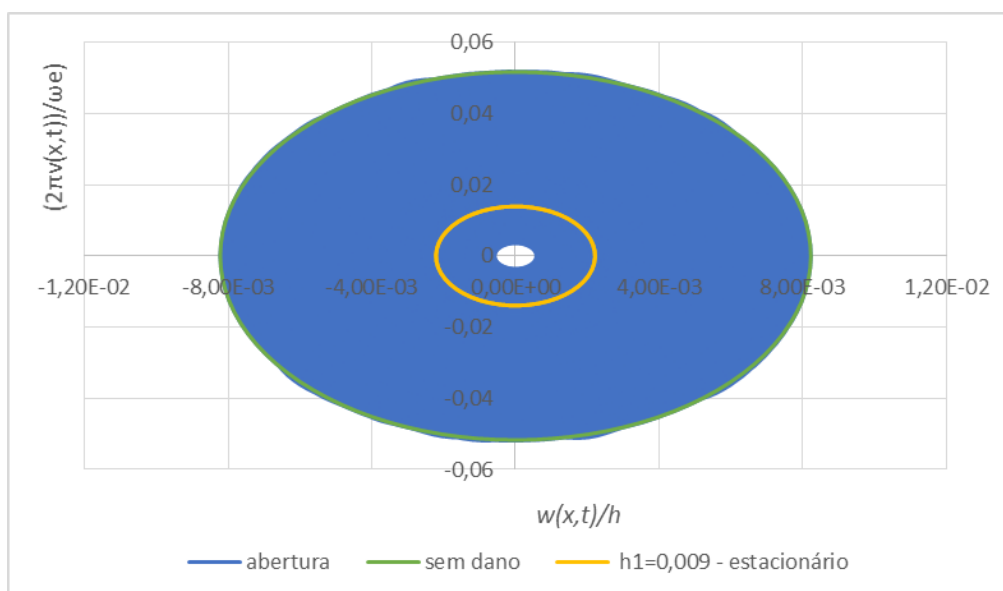


Figura 6. 47 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Secção de Poincaré

Tal como a projecção no plano de fase, a intersecção das respostas na secção de Poincaré não mostra sinais de desordem. Verifica-se uma evolução em espiral, desde o ponto estacionário, antes da abertura do entalhe, até ao ponto referente ao novo equilíbrio dinâmico. Esta evolução indica uma aproximação do regime transiente às características de uma resposta quási periódica de duas frequências, que se caracteriza por uma órbita fechada na secção de Poincaré. Neste caso, se o efeito do transiente não se dissipasse, o movimento apresentaria, até que fosse retirada a excitação, duas frequências de resposta incomensuráveis.

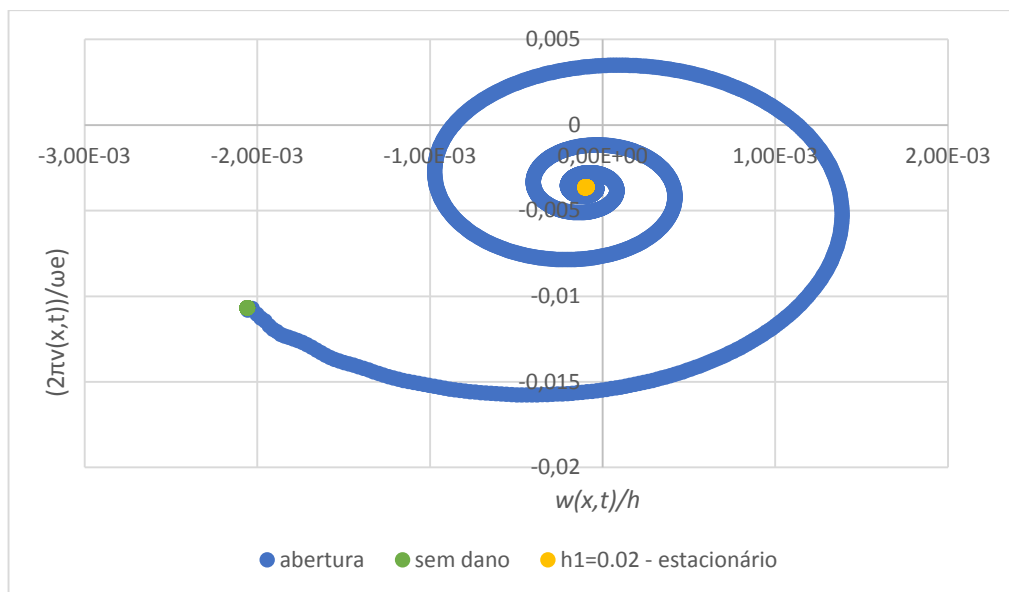


Figura 6. 48 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

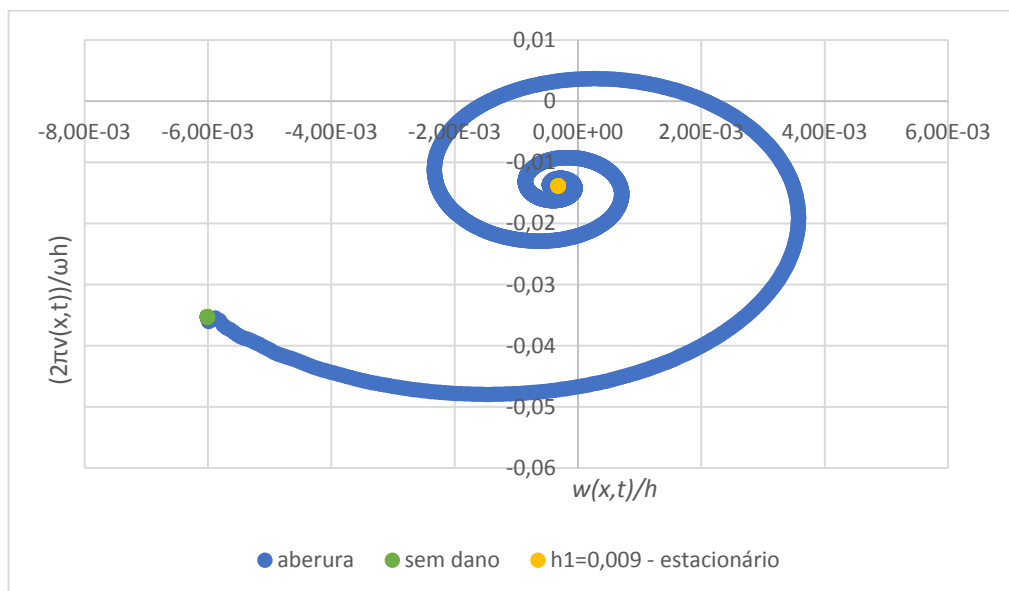


Figura 6. 49 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

6.2.2.2 VIGAS ENCASTRADAS-LIVRES

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

A figura 6.50 mostra a resposta no tempo do caso CE2, no instante de abertura da fenda, para $t_{dano} = 75s$. Nota-se que o transiente para estas condições de fronteira é muito mais longo e um pouco mais acentuado, devido à maior liberdade de movimento numa das extremidades do sistema.

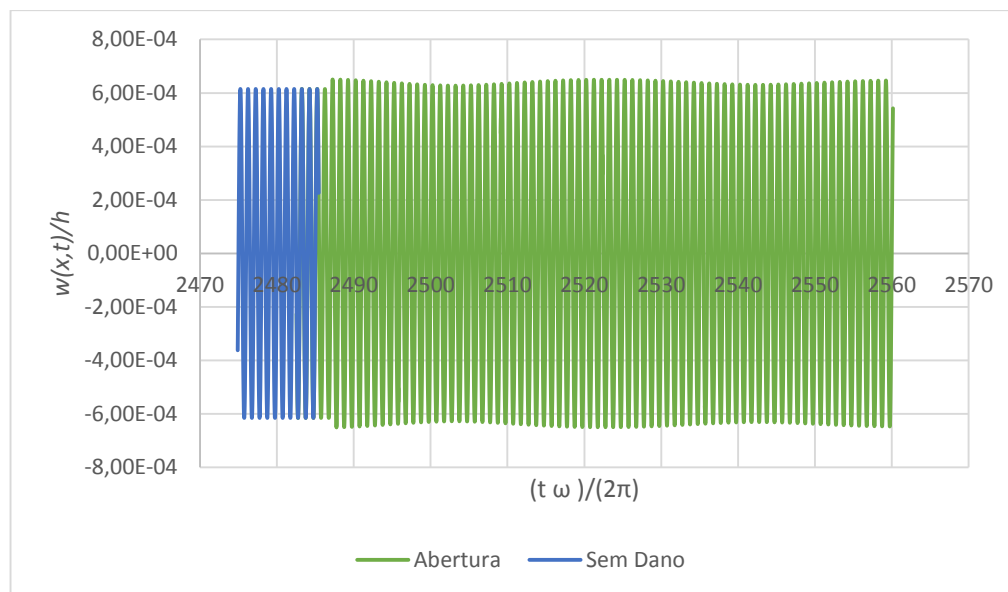


Figura 6. 50 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

Verifica-se um aumento ligeiro da amplitude da resposta, após abertura do entalhe. Identificam-se uma frequência rápida e uma outra bastante mais lenta, que durará até que a que resposta livre se dissipe. Estes resultados não são de todos inesperados, pois a análise em regime permanente já havia mostrado que a presença de um entalhe não afecta a linearidade do sistema, o que implica que o desequilíbrio causado pelo sua abertura também não será significativo. No entanto, para uma excitação à frequência $\omega = \omega_1/3$, verifica-se que a frequência rápida é imposta pela frequência de excitação e a lenta pela resposta livre. Sendo este movimento caracterizado por $\beta < 1$, seria de esperar o contrário. Sem provas experimentais não será possível concluir nada em concreto em relação a este efeito.

A resposta transiente resultante causada pelo entalhe é bastante ordenada e, além disso, apresenta simetria e de duas frequências. Aproxima-se por isso das características de uma resposta quase periódica, com um movimento oscilatório quase periódico de duas frequências, temporário. [20]

Projecção no plano de fase

Após a abertura do entalhe, verifica-se um ligeiro aumento das dimensões da órbita. Enquanto dura o transiente, a órbita não fecha e verifica-se um movimento em torno da posição de regime permanente. Outra solução no plano não seria de esperar uma vez que as respostas antes e depois da abertura do entalhe são quase sobrepostas. Verifica-se que órbitas são

distorcidas pela acção do transiente, principalmente numa fase inicial, o que indica que deverão existir harmónicos, embora de curtíssima duração. Essa distorção é bem visível na figura 6.51, correspondente a um instante de 0,1s após a abertura do entalhe. A órbita aparenta estar fechada, mas não está! Esta ilusão revela a rápida tendência do sistema para evoluir para um movimento linear e periódico, criando por isso um transiente bastante fraco.

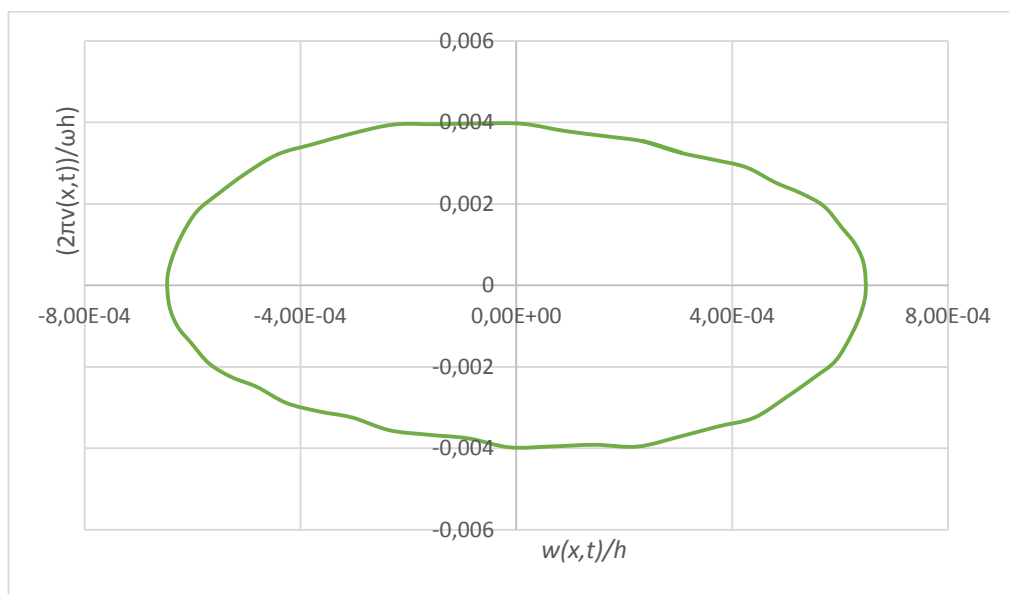


Figura 6. 51 - CE2 Plano de Fase 0,1s após abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

A forte tendência da resposta evoluir no sentido de um movimento linear periódico é também explicitada na figura 6.52, que corresponde a um instante de tempo apenas 0,3s depois do anterior. A distorção das órbitas é consideravelmente menor!

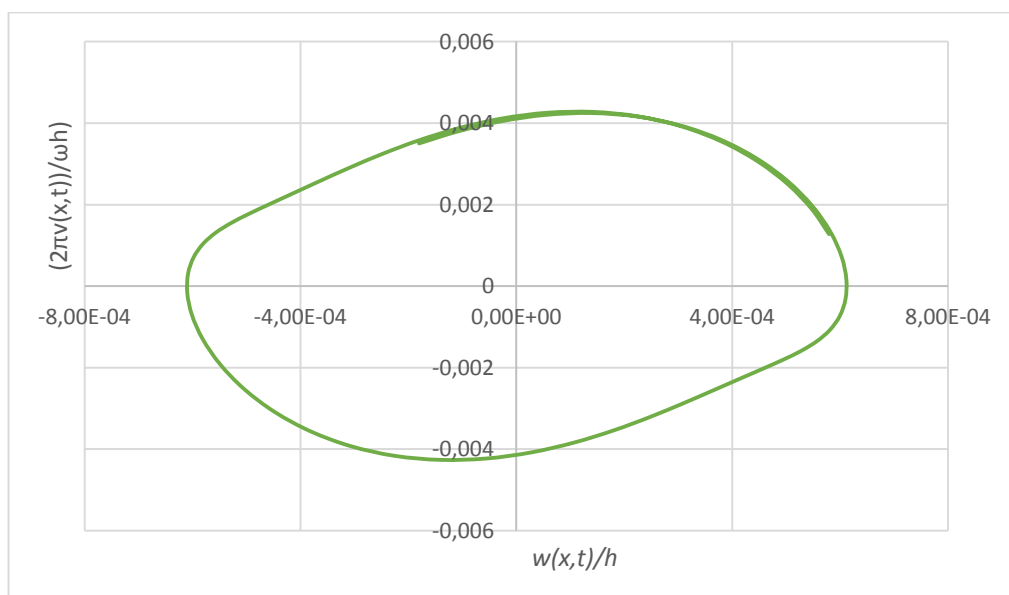


Figura 6. 52 - CE2 Plano de Fase 0,3s após abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

A projecção da solução no plano de fase é exposta na figura 5.63, e mostra a evolução do sistema desde o estado de equilíbrio dinâmico anterior à abertura do entalhe até ao novo equilíbrio após dano.

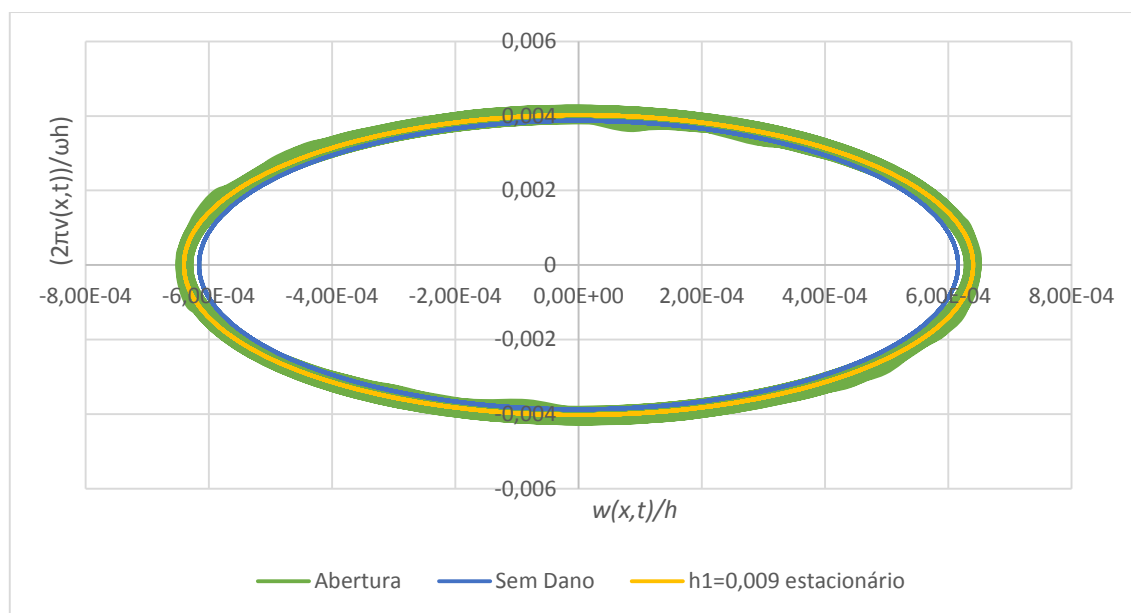


Figura 6. 53 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

Secção de Poincaré

Pela observação da figura 6.54, verifica-se que, após a abertura do entalhe, existe uma pequena dispersão de pontos discretos que rapidamente se organiza numa evolução em espiral bastante regular e ordenada, até ao ponto referente ao regime permanente. A evolução em espiral, aproxima novamente as respostas a oscilações quási periódicas temporárias, de duas frequências [20].

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Resposta no tempo

A figura 6.55 apresenta a resposta no tempo, desde o instante $t_{dano} = 75s$, até 25s após a abertura do entalhe. À escala do gráfico, apenas é visível a envelope da resposta. Verifica-se uma grande queda das amplitudes, uma vez que a viga com dano não é excitada na sua zona de ressonância.

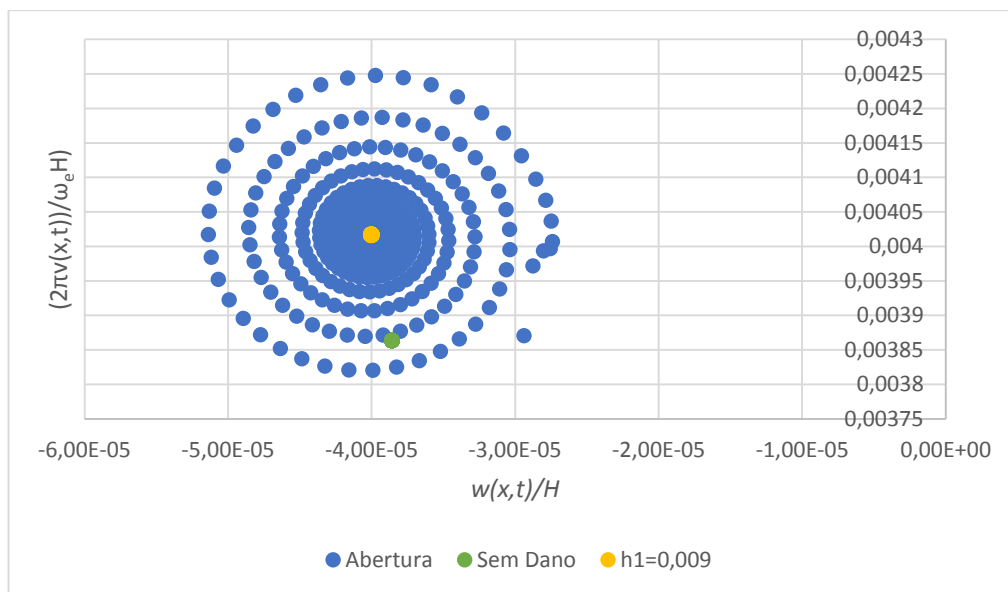


Figura 6. 54 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1/3$

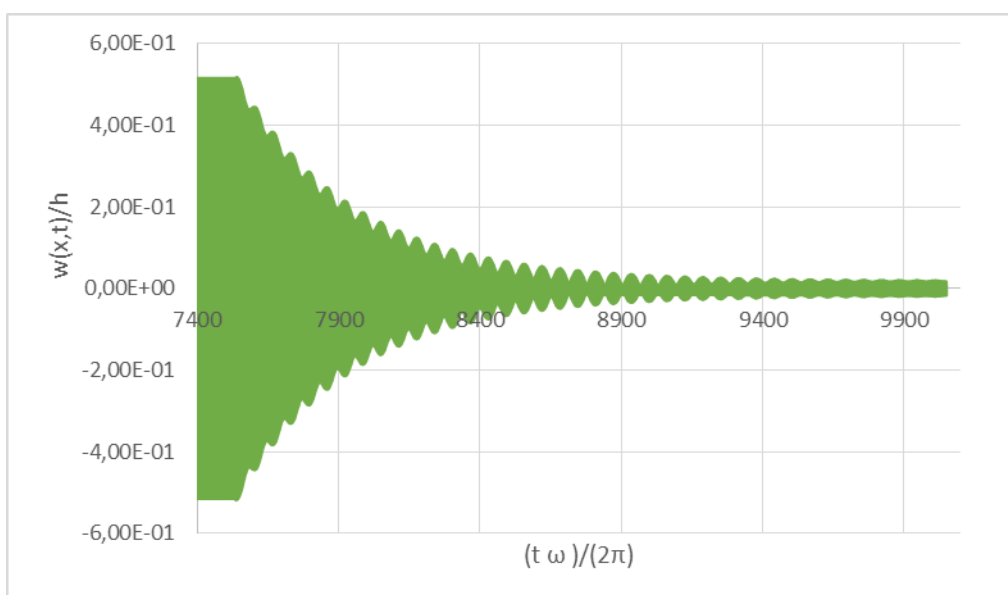


Figura 6. 55 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Ao contrário do verificado para vigas duplamente encastradas, para as quais é possível separar a resposta em duas fases diferentes, uma cuja solução é caracterizada pelo decréscimo de amplitude e outra onde é modelada em amplitude, para uma viga encastrada verifica-se que as duas fases coexistem numa fase inicial do transiente, possivelmente devido à grande liberdade de movimento da extremidade livre da viga.

Quando o entalhe abre, a meio do movimento, verifica-se uma queda gradual das amplitudes de resposta. Em todos os instantes, o transiente é bastante ordenado e não caótico,

e é possível distinguir duas frequências na resposta. Verifica-se também que é de dissipação muito lenta e, num estado avançado do transiente, por exemplo a partir dos 9400 ciclos, a resposta aproxima-se, num intervalo de tempo fechado, a um movimento quási periódico. Este fenómeno será visível, também, noutros casos mais a frente apresentados. A figura 6.56 mostra o efeito do transiente, passados 25s da abertura do entalhe.

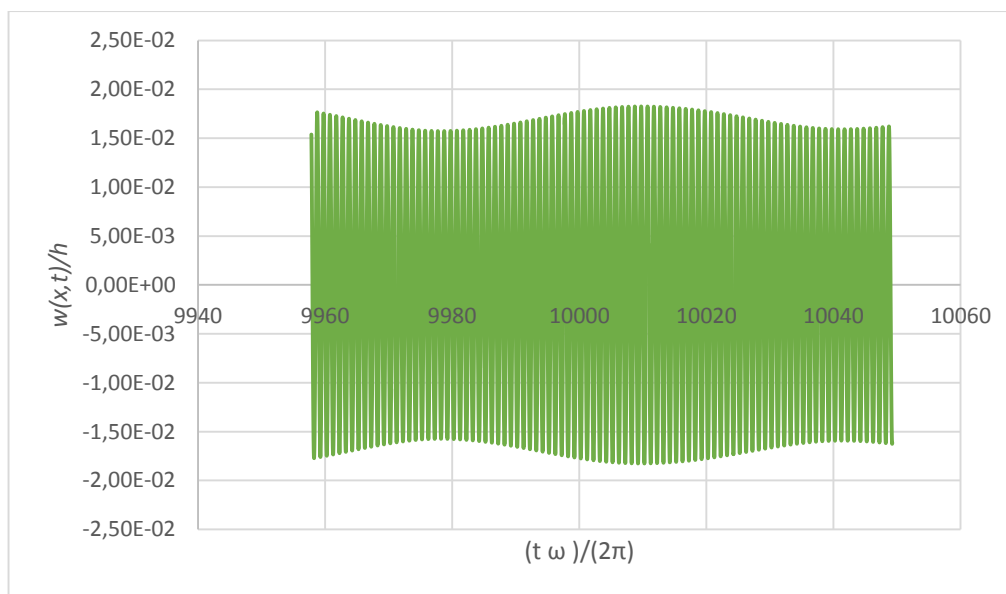


Figura 6. 56 - CE2 Resposta no Tempo 25s após abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Projecção no plano de fase

A abertura do entalhe não cria distúrbios significativos na resposta. Em oposição com o verificado para vigas duplamente encastradas, verifica-se que órbitas são distorcidas pela acção do transiente numa fase inicial, o que indica que deverão existir harmónicos, embora de curtíssima duração, como mostra a figura 6.57, imediatamente após a abertura do dano. Mais uma vez se verifica que a órbita é quase fechada, o que indica um transiente de fraca intensidade.

Para um instante de tempo de apenas 0,05s após a abertura do entalhe, é notória a evolução no sentido homogeneização do traço da órbita, como mostra a figura 6.58.

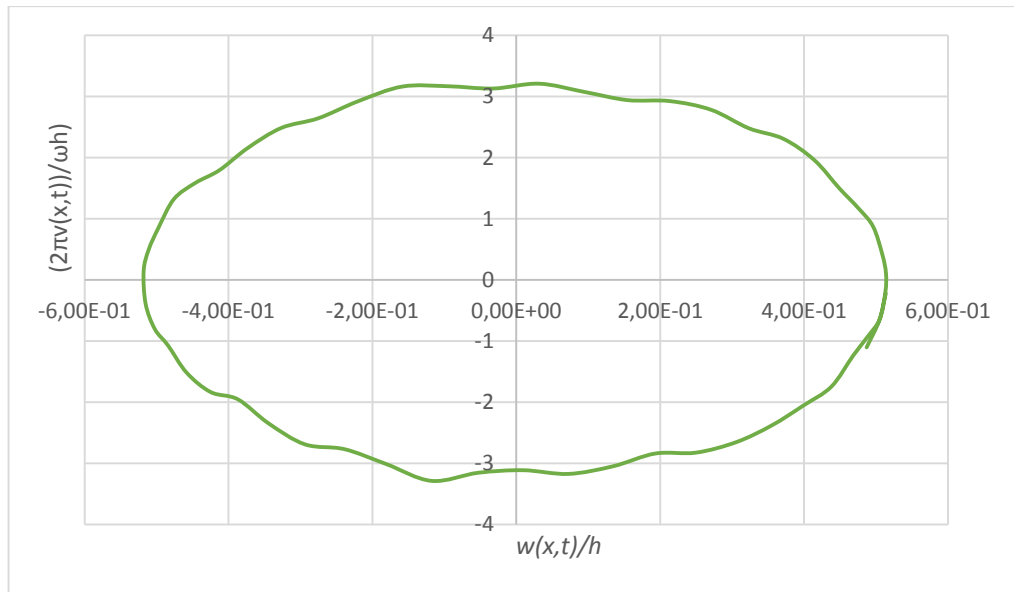


Figura 6. 57 - CE2 Plano de Fase no instante de abertura do entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

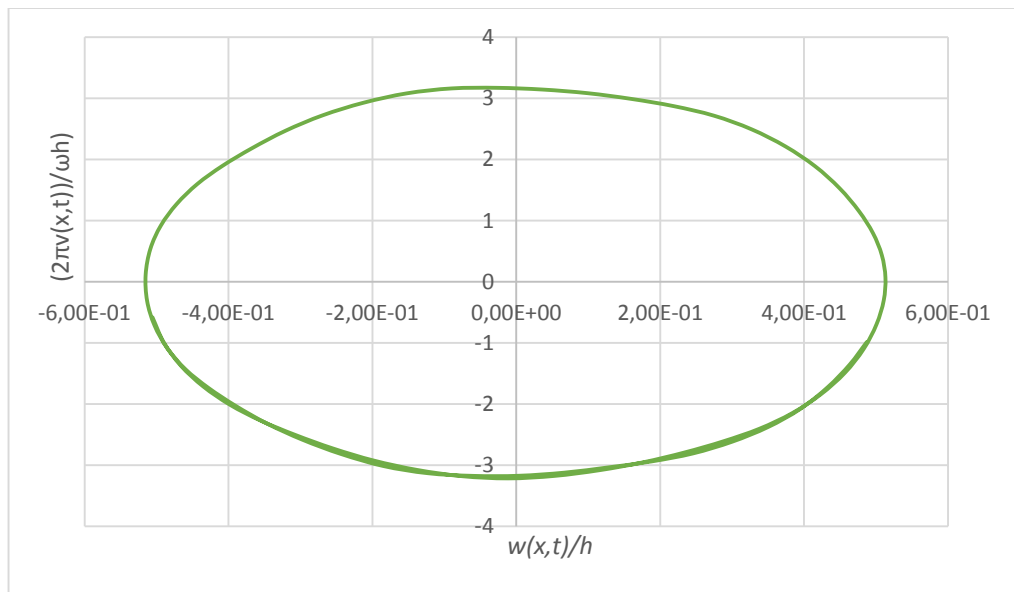


Figura 6. 58 - CE2 Plano de Fase 0,05s após abertura entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

A projecção da solução no plano de fase é exposta na figura 6.59, e mostra a evolução do sistema desde o estado de equilíbrio dinâmico anterior à abertura do entalhe até ao novo equilíbrio após dano.

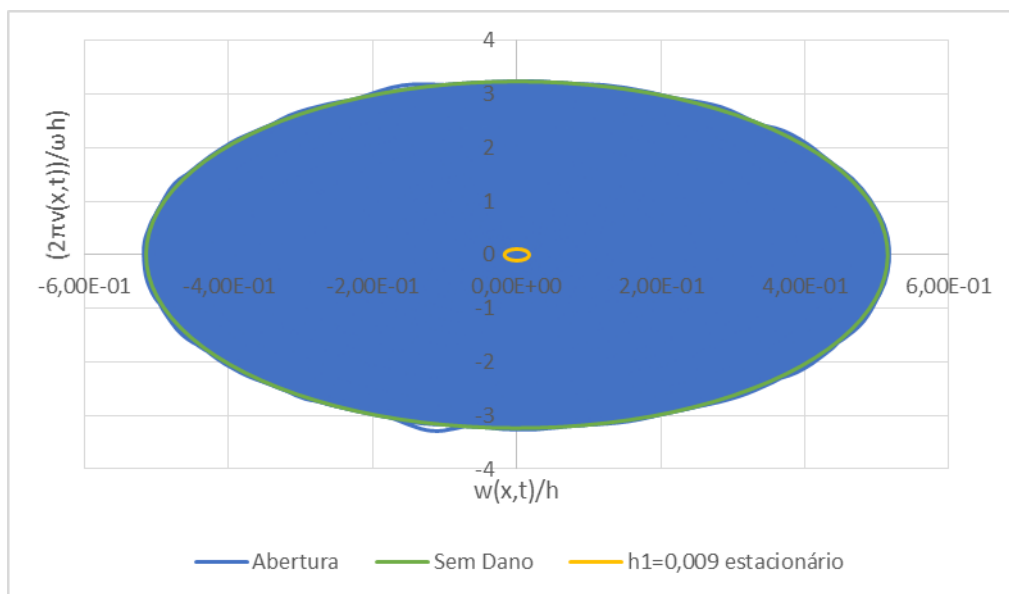


Figura 6. 59 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Secção de Poincaré

Tal como a projecção no plano de fase, a intersecção das respostas na secção de Poincaré é bastante organizada. Na figura 6.60, verifica-se uma evolução em espiral, desde o ponto estacionário, antes da abertura do entalhe, até ao ponto referente ao novo equilíbrio dinâmico. Esta evolução indica uma aproximação do regime transiente às características de uma resposta quási periódica de duas frequências, que se caracteriza por uma órbita fechada na secção de Poincaré. Se o efeito do transiente não se dissipasse, o movimento apresentaria, até que fosse retirada a excitação, duas frequências de resposta incomensuráveis.

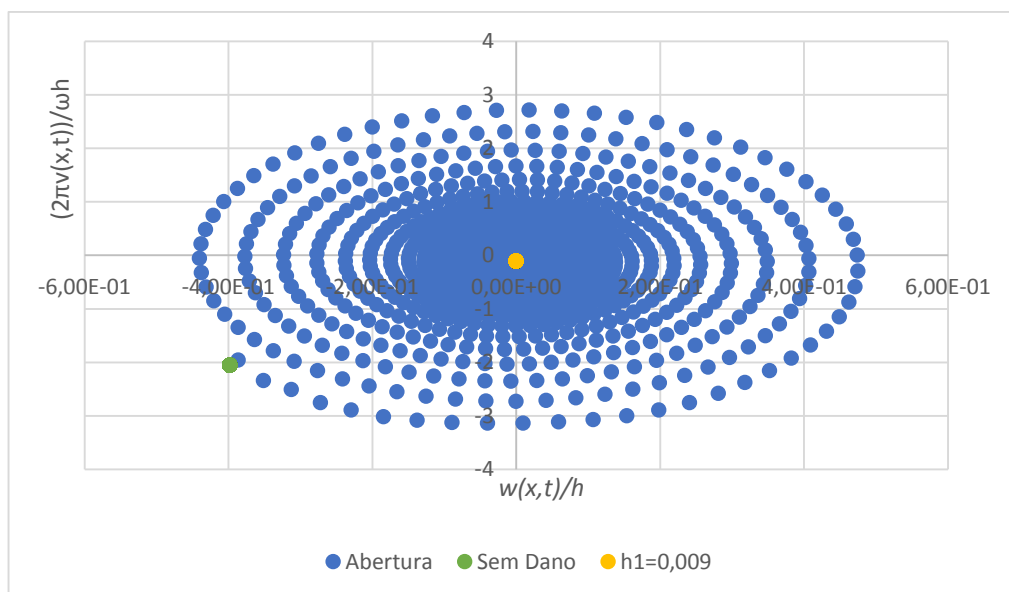


Figura 6. 60 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_1$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_{2d}$

Resposta no tempo

A figura 6.61 apresenta a resposta no tempo do sistema CE1 nos períodos compreendidos entre a abertura do entalhe, para $t_{dano} = 50s$, e aproximadamente 8,3s após a abertura do entalhe. A figura 6.62 mostra a resposta logo após a abertura do entalhe.

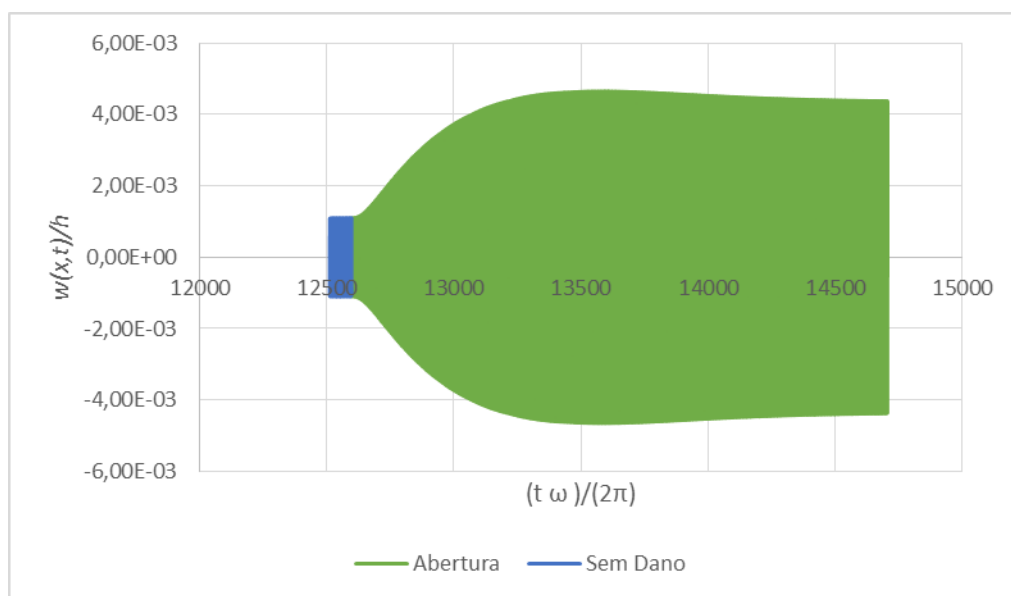


Figura 6. 61 – CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

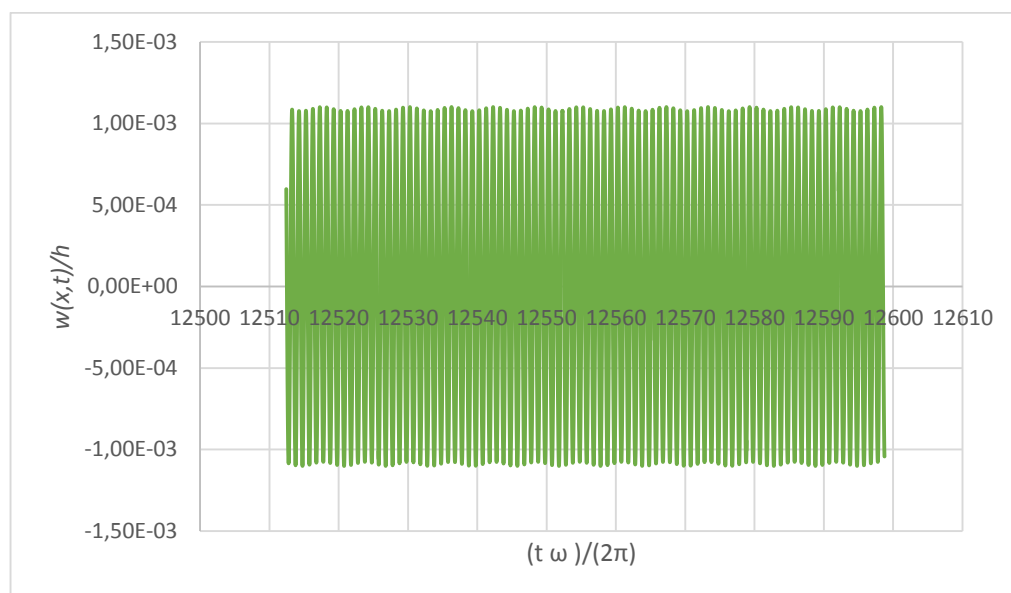


Figura 6. 62 – CE1 Resposta no Tempo no instante de abertura do entalhe. Viga encastrada. $\omega = \omega_{2d}$

Verifica-se um aumento substancial da amplitude da resposta, assim como era esperado. O período de cada ciclo individual é de tal forma elevado, que à escala do gráfico apenas se

consegue ver a envelope da resposta e não se torna possível caracterizar movimento em pormenor. A figura 6.63 correspondente a uma ampliação da resposta durante o processo de subida das amplitudes, a cerca de 3,7s após a abertura do dano, mostra uma solução de grande regularidade, modulada por duas frequências. A solução apresenta claramente dois períodos bem definidos, correspondentes a cada uma das frequências, e não se verifica a existência de picos de amplitude, o que lhe confere uma grande regularidade e suavidade. A figura 6.63 mostra que para um intervalo de tempo finito, e curto, a solução pode ser aproximada a uma solução quási periódica de duas frequências, que será na realidade temporária. [20]

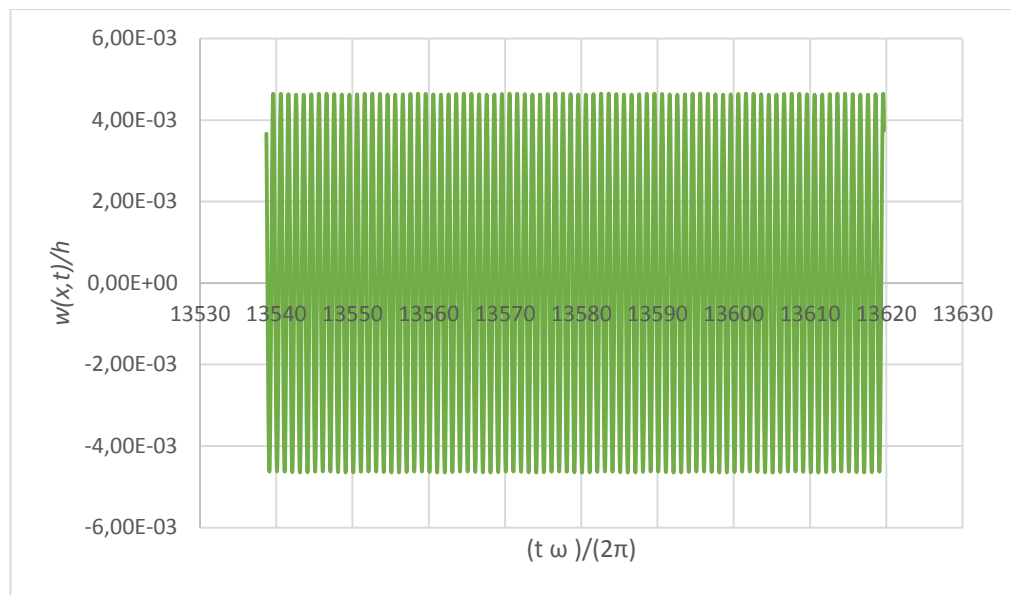


Figura 6. 63 – CE1 Resposta no Tempo 3,7s após de abertura do entalhe. Viga encastrada. $\omega = \omega_{2d}$

Projecção no plano de fase

As observações agora feitas ao desenvolvimento do transiente no plano de fase vão de encontro ao já mencionado anteriormente, para a excitação à primeira frequência natural da viga com dano, mas desta vez a evolução toma o sentido contrário, isto é, de uma órbita interior para uma exterior. Verifica-se que a perturbação resultante da abertura do entalhe é quase desprezável. A figura 6.64 mostra o primeiro ciclo da órbita transiente no plano de fase e a distorção observada é quase indetectável. Nela é também possível observar, após o primeiro ciclo, a proximidade entre o ponto de partida e o último ponto correspondente ao último instante de tempo considerado, que quase se tocam e dão origem a uma órbita fechada. Estes dois detalhes reflectem a baixa amplitude imposta pelo transiente e mostram que o sistema evolui rapidamente para o movimento linear periódico, encontrado no regime permanente. Contudo,

até que um novo equilíbrio seja atingido e o transiente totalmente dissipado, a órbita não irá fechar, característica essa de uma resposta quási periódica de duas frequências.

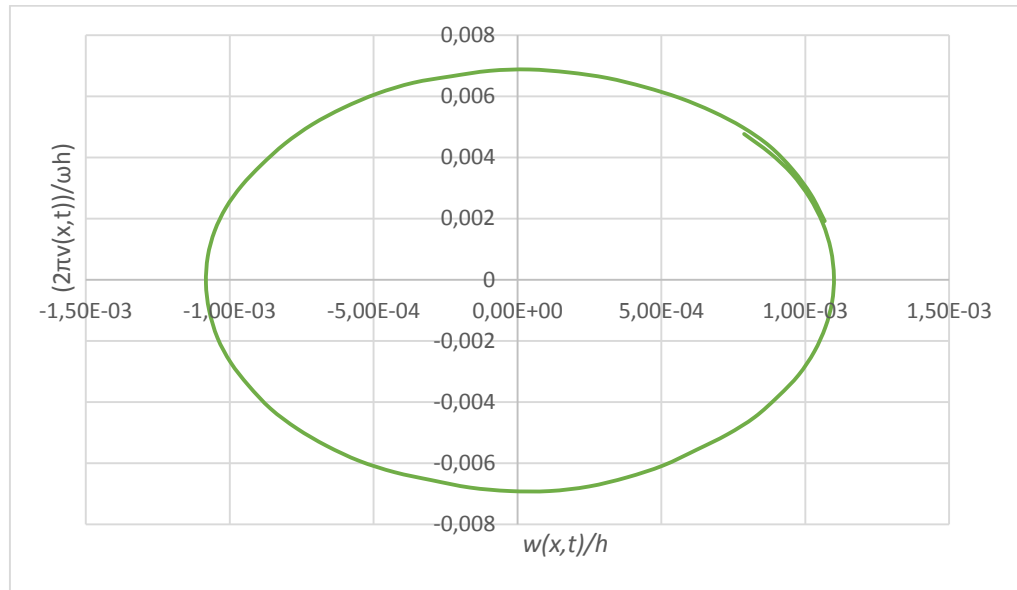


Figura 6. 64 - CE1 Plano de Fase no instante de abertura entalhe. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

A figura 6.65 apresenta a evolução completa da projecção no plano de fase.

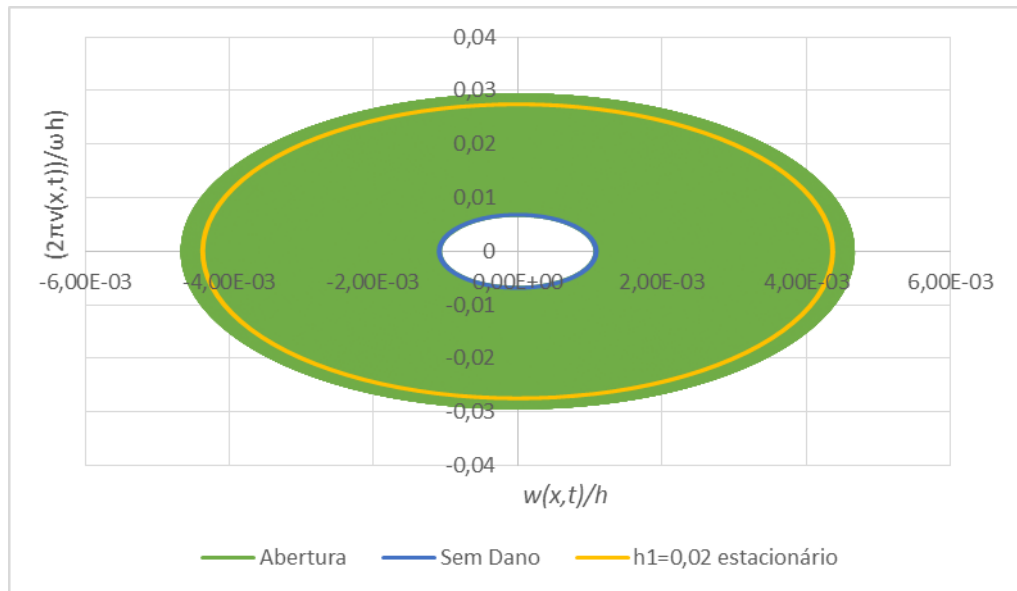


Figura 6. 65 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga encastrada-livre. $\omega = \omega_{2d}$

Secção de Poincaré

A intersecção da resposta com a secção de Poincaré, da figura 6.66, apenas reforça o já concluído. Verifica-se uma tendência para que seja iniciada uma curva em fora de espiral. No entanto, a fraca intensidade do transiente leva a uma evolução quase directa entre os pontos referentes aos equilíbrios dinâmicos do sistema, antes e depois de aberto o entalhe.

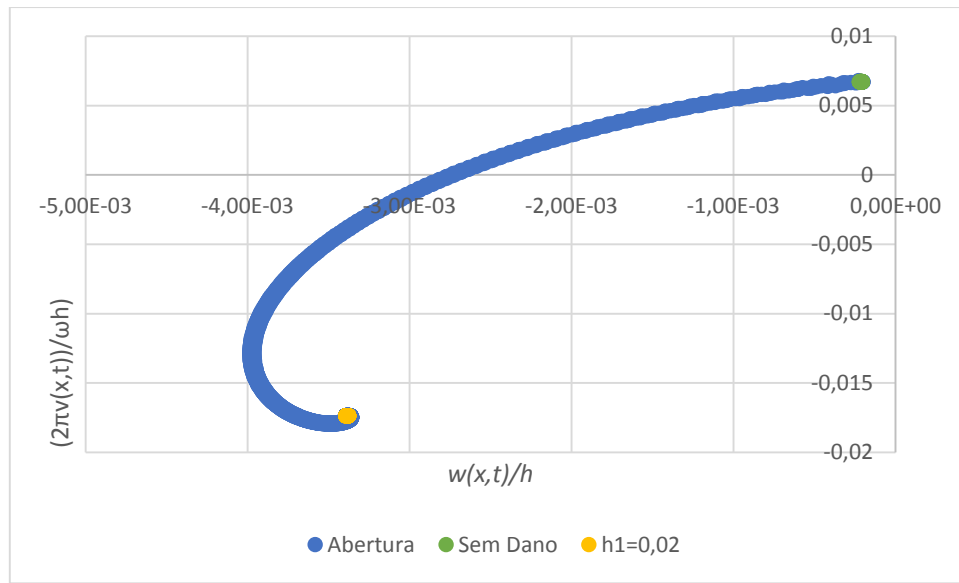


Figura 6. 66 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga encastrada. $\omega = \omega_{2d}$

6.3 FREQUÊNCIAS NATURAIS PELAS FUNÇÕES HERMITENAS, SEGUNDO A TEORIA DE TIMOSHENKO

As tabelas 6.11 e 6.12 apresentam os valores obtidos, para os primeiros cinco modos de vibração, com a introdução das novas funções no modelo de elementos finitos deste capítulo. A primeira é referente à viga intacta, onde na última coluna se apresentam as frequências obtidas com as tradicionais funções cúbicas de Hermite. A segunda é relativa à viga com dano e segue a mesma organização. Os resultados são referentes ao caso CE1, para as vigas encastradas-livres intacta e de maior profundidade de entalhe.

Tabela 6. 11 – CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelas novas funções vs. funções tradicionais

	12 GL	18 GL	22 GL	26 GL	28 GL	30 GL	Funções EB (27GL)
ω_1	256,3575	256,3486	256,3464	256,3430	256,3428	256,3427	256,3429
ω_2	1588,507	1588,232	1588,161	1588,097	1588,087	1588,070	1588,092
ω_3	4369,659	4368,403	4368,077	4367,968	4367,895	4367,837	4367,931
ω_4	7949,888	7949,888	7949,888	7949,888	7949,888	7949,888	7949,888
ω_5	8358,547	8352,791	8351,305	8350,314	8350,052	8349,842	8350,179

Tabela 6. 12 - CE1 com entalhe. Frequências naturais [rad/s] pelas novas funções vs. funções tradicionais

	12 GL	18 GL	22 GL	26 GL	28 GL	30 GL	Funções EB (27GL)
ω_1	257,3178	257,3058	257,3003	257,2940	257,2928	257,2915	257,2940
ω_2	1585,926	1585,259	1584,822	1584,406	1584,278	1584,106	1584,396
ω_3	4354,206	4349,396	4345,677	4342,342	4341,215	4339,688	4342,315
ω_4	7972,495	7971,536	7970,619	7969,701	7969,406	7968,961	7969,697
ω_5	8334,834	8320,817	8312,224	8304,550	8302,142	8298,859	8304,393

Como é possível observar, não são obtidas melhorias em relação aos resultados conseguidos com as tradicionais funções cúbicas de Hermite. Tanto para viga intacta como para a viga com dano observa-se que os valores das frequências obtidas pelas funções tradicionais, com 27 graus de liberdade, estão dentro do intervalo definido entre os valores das frequências calculado com as novas funções, para 26 e 28 GL. Ou seja, conclui-se que não se verifica qualquer melhoria em relação à convergência das frequências naturais, pelo menos na aplicação destas funções a problemas unidimensionais.

6.4 FECHO DO CAPÍTULO

No capítulo que agora se encerra, foram apresentados os resultados para a excitação dos casos CE1 e CE2 a diferentes frequências e para as condições de fronteira de duplo encastramento e encastrado-livre. A solução dinâmica dos sistemas foi apresentada sob a forma de representações gráficas da resposta no tempo, planos de fase, secções de Poincaré e espectros de amplitudes. Em regime permanente, a principal conclusão a retirar é a confirmação do comportamento linear do entalhe. Verificou-se que o entalhe se mantém sempre aberto, tanto a baixas como a altas frequências. De uma forma geral, independentemente da frequência de excitação, em regime permanente, as respostas no tempo são simétricas, regulares com um

período bem definido, de envelope plana e de traço uniforme. Estas características identificam claramente respostas lineares e periódicas. Nesse sentido, as projecções nos planos de fase mostram órbitas fechadas de aparência elíptica, simétricas e não distorcidas e as intersecções com a secção de Poincaré apresentam apenas um ponto discreto, em cada caso. Conclui-se que para excitações de baixas frequências, a presença do entalhe não tem praticamente qualquer influência na dinâmica dos sistemas, quer em vigas encastradas-livres quer nas duplamente encastradas. Contrariamente, para excitações na zona de ressonância, verifica-se que a presença do entalhe origina respostas distintas. Para uma excitação à primeira frequência natural da viga intacta, ω_1 , observa-se que as respostas das vigas com entalhe são de amplitude inferior às daquelas sem entalhe, como seria de esperar. Do mesmo modo, no caso de vigas encastradas-livres, a uma excitação à segunda frequência natural da viga com entalhe, ω_{2d} , verifica-se que a viga danificada tem um movimento de amplitudes mais elevadas. Ainda assim, essas diferenças de amplitude, não se traduzem em movimentos de ordens de grandeza distintas. Este facto é de importante consideração, pois revela que a presença de um entalhe não causa um decréscimo significativo das frequências naturais de vibração. Este fenómeno é explicado pela redução local de massa, típica deste tipo de dano, que compensa o decréscimo da rigidez do sistema. Como se demonstrou, a razão de frequência das vigas com entalhe é muito pouco superior à unidade e, por esses motivos, o desfasamento entre as respostas com e sem dano inferior a $\pi/2$ rad. Assim, do ponto de vista da detecção de dano, a análise da dinâmica em regime permanente é pouco esclarecedora. A análise da resposta em regime transiente mostra algumas particularidades interessantes. A uma excitação de baixas frequências, nos instantes logo após a abertura do entalhe, verifica-se um discreto aumento das amplitudes do movimento, com um transiente de intensidade inferior ao que se verifica quando o sistema danificado parte do repouso. À frequência $\omega = \omega_1$, observa-se que a rápida queda de amplitudes da resposta vibratória origina uma resposta transitória modelada em amplitude. Para uma excitação à frequência ω_{2d} , verifica-se um aumento gradual das amplitudes, como seria de esperar. Em todos os casos, as órbitas nos planos de fase apresentam ligeiras distorções, que indicam a existência de harmónicos, e a secção de Poincaré mostra uma evolução em espiral entre os equilíbrios dinâmicos, antes e após a ocorrência de dano. Uma das características mais importantes das respostas em regime transiente é o facto de estas apresentarem duas frequências, uma imposta pela excitação harmónica e outra que se dissipará. Franco et al. [20] descrevem este tipo de transientes como oscilações quase periódicas temporárias, por estes apresentarem características semelhantes àsquelas de movimentos quase periódicos, em regime permanente. Esta interpretação é exponenciada pelas curvas em espiral na secção de Poincaré,

que resultam da variação das amplitudes no tempo. Caso a resposta transitória não se dissipasse, então as curvas seriam fechadas, características de um movimento quase periódico de duas frequências, de acordo com a definição dada na referência [31]. No final do capítulo, foram ainda apresentados os resultados obtidos, na forma das cinco primeiras frequências naturais, pela aplicação das funções hermiteanas baseadas na teoria de Timoshenko. Mostrou-se que, pelo menos na aplicação em modelos unidimensionais estas funções de forma não trazem qualquer vantagem na convergência dos resultados.

CAPÍTULO 7

RESPOSTA DINÂMICA DE VIGAS COM FENDA

7.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos baseado na teoria de vigas com dano de Christides e Barr. Considera-se não só a redução local de rigidez, devido à existência da fenda numa das superfícies da viga, como também efeito de abertura e fecho da mesma, que transformará o sistema intacto de comportamento linear num sistema bilinear, consequência da alternância no tempo e no espaço da rigidez que modela a resposta.

De forma a estudar em detalhe o comportamento de uma viga sujeita ao efeito bilinear de uma fenda é de todo o interesse analisar e comparar as respostas, em regime permanente, antes e após a ocorrência de dano na superfície. É então definida uma constante real positiva t_{dano} , referente a esse instante de transição. É também analisada resposta do sistema nos instantes após a abertura da fenda, sujeita a um efeito transiente, e cuja compreensão poderá ser útil do ponto de vista da detecção do dano.

São apresentados dois casos de estudo, CE1 e CE2, de dimensões distintas apresentadas na tabela 6.11. Cada caso será avaliado para a condição de fronteira de duplo encastramento e excitados por uma força harmónica de amplitude constante, F . Os casos CE1 e CE2 são excitados por duas frequências de excitação, $\omega = \omega_1/3$ e $\omega = \omega_1$, onde ω_1 é a primeira frequência natural da viga sem dano. Exclusivamente para o caso CE1, são também apresentados resultados para uma excitação segundo a primeira frequência natural da viga com dano, ω_{1d} . A escolha destas frequências relaciona-se com o interesse em estudar a resposta vibratória para uma solicitação de baixa frequência e para uma solicitação na zona de ressonância. São também comparadas duas fendas de profundidades diferentes em cada CE.

Convém referir ainda que, para evitar que a resposta no tempo apresente amplitudes excessivas que estejam para lá do ideal para um modelo de vigas finas (diga-se uma amplitude de resposta menor ou igual a 10% a espessura da viga), a amplitude da força de excitação é para

todos os casos de somente 0,5N. A figura 7.1 apresenta uma representação esquemática de uma viga e das suas medidas, para a condição de fronteira de duplo encastramento.

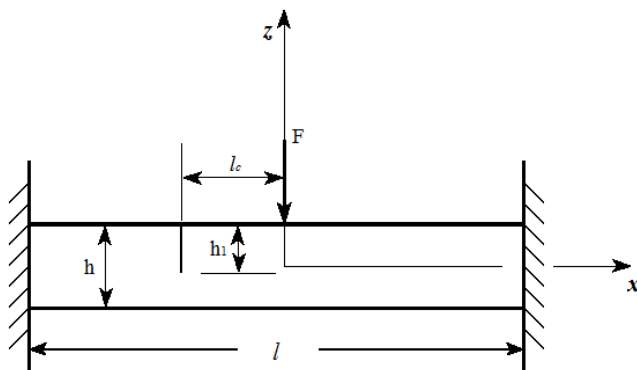


Figura 7. 1 - Dimensões de uma viga com fenda duplamente encastrada

Neste modelo, PO é o número de graus de liberdade do sistema, neste caso apenas segundo a direcção transversal. Para todos os CE, o material escolhido foi o alumínio. As tabelas seguintes apresentam os dados relativos aos dois modelos.

Tabela 7. 1 - Dimensões geométricas da viga e fenda. Vigas duplamente encastradas

	$l[m]$	$h[m]$	$b[m]$	$h_1[m]$	h/l	h_1/h	$l_e[m]$
CE1	1,0	0,05	0,025	0,01	0,05	0,2	0,000
				0,02		0,4	
CE2	0,406	0,0203	0,02	0,001	0,05	0,049	0,07515
				0,009		0,443	

Tabela 7. 2 - Propriedades materiais e graus de liberdade. Vigas duplamente encastradas

	E	ρ	ν	β	ξ [32]	PO
	[Pa]	[kg/m³]				
CE1	7,172E10	2800	0,33	4,89e-7	4E-4	20
CE2	7,172E10	2800	0,33	1,98E-7	4E-4	20

A validação do modelo de elementos finitos para a viga intacta é feita por comparação dos valores das frequências naturais de vibração, por ele calculados, com os mesmos valores obtidos pela solução exacta apresentada na tabela 4.1 Os resultados apresentam-se nas tabelas 7.3 - 7.5.

Tabela 7. 3 - CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e teoria EB. Diferença [%]. Viga duplamente encastrada

CE1 INTACTO	MEF-p	Teoria EB	Diferença [%]
ω_1	1634,3695	1634,34	0,002
ω_2	4505,2026	4505,20	5,99E-05
ω_3	8831,9985	8831,99	1E-04
ω_4	14599,742	14599,6	0,001
ω_5	21809,496	21809,4	4E-04

Tabela 7. 4 - CE1 Intacto. Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p e teoria EB. Diferença [%]. Viga duplamente encastrada

CE2 INTACTO	MEF-p	Teoria EB	Diferença [%]
ω_1	4025,5408	4025,4734	0,002
ω_2	11096,558	11096,545	1E-04
ω_3	21753,691	21753,676	7E-05
ω_4	35959,956	35959,674	8E-04
ω_5	53717,971	53717,652	6E-04

Tabela 7. 5 - Frequências naturais [rad/s] pelo MEF-p. Vigas com fenda. Viga duplamente encastrada

	ω_{1d}	ω_{2d}	ω_{3d}	ω_{4d}	ω_{5d}
CE1 $h_1=0,01$	1564,0744	4467,2452	8416,6770	14332,737	20972,203
CE1 $h_1=0,02$	1435,0237	4365,4570	7786,4332	13673,155	19735,870
CE2 $h_1=0,001$	4013,1154	10998,081	21686,384	35772,160	53286,797
CE2 $h_1=0,009$	3766,0625	9591,1559	20300,307	32428,423	47829,557

A solução da equação diferencial do movimento é obtida pela aplicação do método de Newmark. A análise das soluções será feita com base em quatro representações gráficas: resposta no tempo, projecção no plano de fase deslocamento vs. velocidade, secção de Poincaré e espectro de amplitudes. As conclusões e comentários feitos aos resultados obtidos são referenciados, regra geral, pelo trabalho de Nayfeh e Balachandran [31]. Quando necessário, outras referências são introduzidas.

7.2 RESPOSTA DINÂMICA DE VIGAS EULER-BERNOULLI COM DANO

7.2.1 Resposta em regime permanente

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

As figuras 7.2 e 7.3 apresentam as respostas no tempo dos casos de estudo CE1 e CE2, para várias profundidades de fenda. Na ausência de dano na viga, as respostas no tempo em ambos os casos são sinusoidais, simétricas em relação às amplitudes e periódicas. Outro resultado não seria de esperar, pois sabe-se à partida que a resposta vibratória, em regime permanente, de uma viga de secção intacta e uniforme é caracterizada por um movimento linear-periódico. As respostas das vigas com dano caracterizam-se principalmente pela sua assimetria em relação às amplitudes. Verifica-se que essa assimetria se deve quase na totalidade a um aumento da magnitude máxima no movimento descendente, correspondente a uma curvatura positiva da viga e para a qual se considera aberta a fenda. Conclui-se assim, que o aumento local de flexibilidade, e inversamente a diminuição da rigidez, é o principal responsável por esta particularidade e que quanto maior a profundidade da fenda maior será a assimetria.

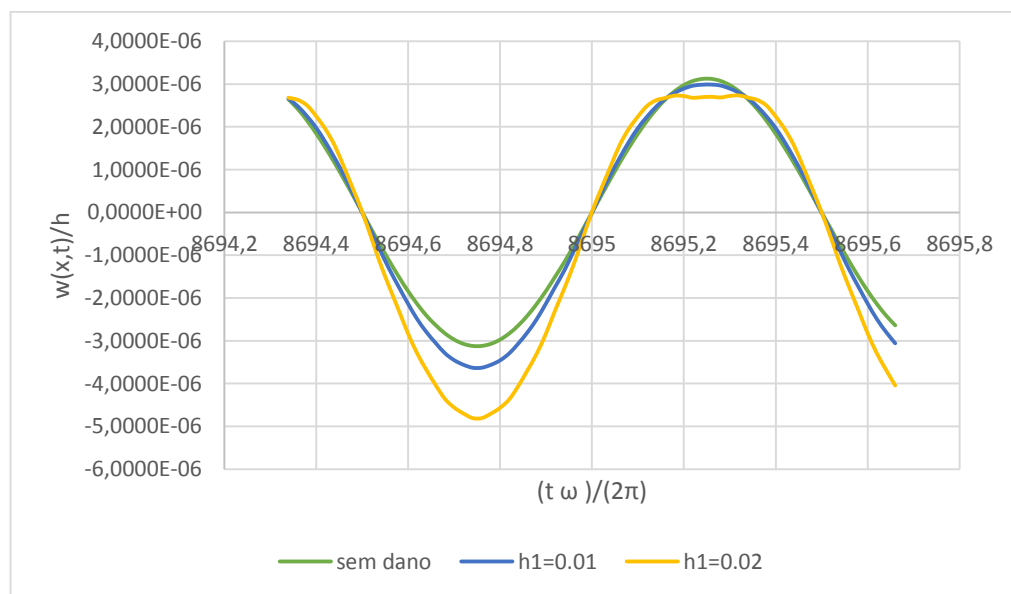


Figura 7. 2 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

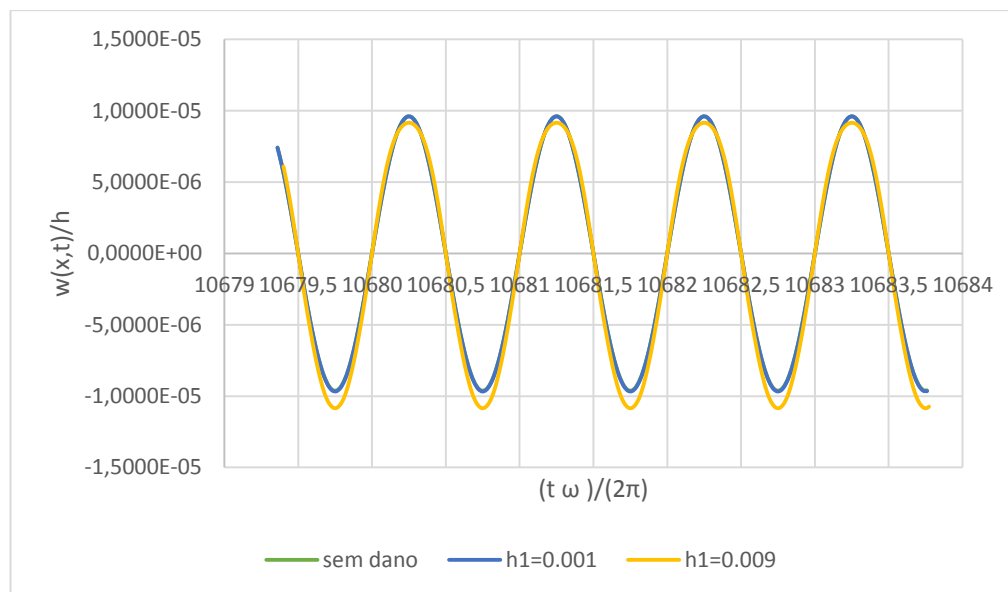


Figura 7.3 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Nas figuras 7.2 e 7.3, observa-se que o limite superior da resposta para uma viga intacta, poderá ser considerado como um valor assintótico no sentido em que, na existência de dano, o máximo atingido pela resposta no movimento ascendente tende para esse limite sem que nunca o atinja, ficando mais próxima quanto menor for o dano. Este é um comportamento característico de um sistema bilinear. Destaque-se a resposta do CE2 para $h_1=0,001\text{m}$, para a qual é visível a aproximação assintótica à resposta sem dano. A fenda é tão superficial que à escala da representação não é distinguível a diferença entre as respostas com e sem dano. A natureza bilinear do sistema implicará, em princípio, a existência de harmónicos da frequência de excitação. Particularmente, no caso CE1 para um a profundidade da fenda de $0,02\text{m}$, é visível o que parece ser uma interferência na parte superior da resposta.

A figura 7.4 mostra que esta interferência se repete no tempo, o que leva mais uma vez a adivinhar uma resposta periódica. Em todos os casos, com dano ou intactos, as respostas estão em fase no tempo, apresentam uma envelope plana, pelo que se afigura a existência de harmónicos fracos, e um traço uniforme característico de uma solução periódica. A periodicidade da resposta e a existência de harmónicos poderá ser confirmada na projecção no plano de fase.

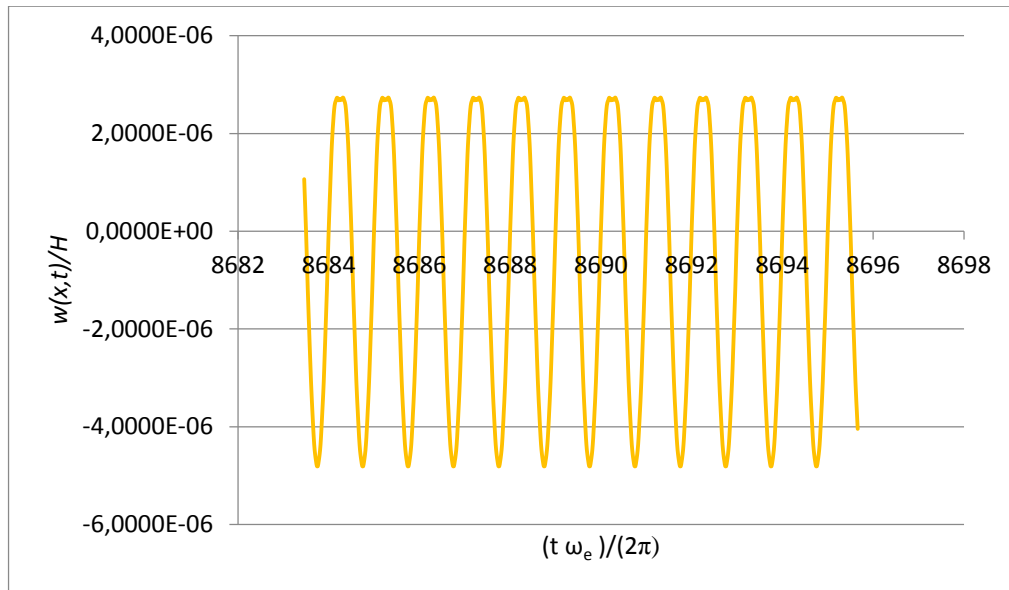


Figura 7. 4 - CE1 Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Projectção no Plano de Fase

As figuras 7.5 e 7.6 apresentam as projecções no plano de fase para os casos de estudo e coloca em evidência o efeito do dano na caracterização do movimento. As projecções no plano de fase das figuras mostram um conjunto de órbitas fechadas, qualquer que seja o caso de estudo. Este aspecto é muito importante, porque confirma a periodicidade de todas as soluções, tal como se suspeitava pela análise da resposta no tempo. Regra geral, ao número de n de voltas necessárias para fechar a curva está associado um período de n oscilações no tempo [31]. Verifica-se que todas as projecções apenas necessitam de uma volta até atingirem de novo o ponto inicial. Logo, todas as soluções são periódicas de apenas um período mas, como veremos, com harmónicos da frequência fundamental. Não obstante, é notória a diferença entre os diferentes casos. Observa-se que para maiores profundidades de fenda correspondem uma maior assimetria em relação às amplitudes de deslocamento e uma maior distorção do contorno da curva. Sabe-se que, para uma solução periódica de um sistema de equações diferenciais, distorções no plano de fase indicam a presença de harmónicos, o que leva a concluir que uma órbita mais distorcida deverá ser indício da existência de harmónicos mais fortes, considerando que no outro extremo estão as projecções elípticas e suaves de sistemas lineares periódicos. Confirma-se então que o comportamento bilinear, infringido pela abertura e fecho da fenda, resulta num movimento não-linear periódico.

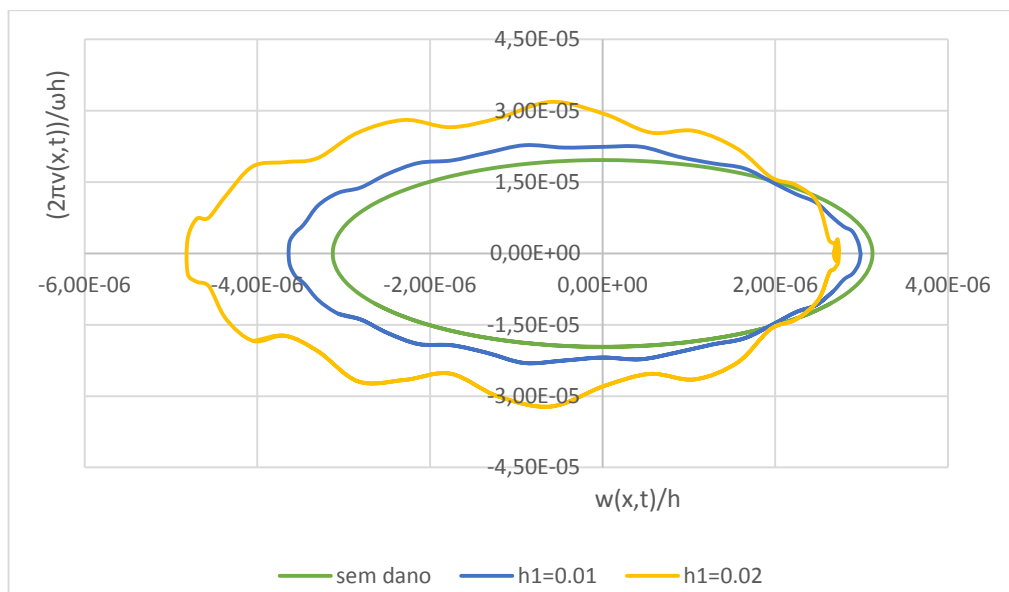


Figura 7. 5 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

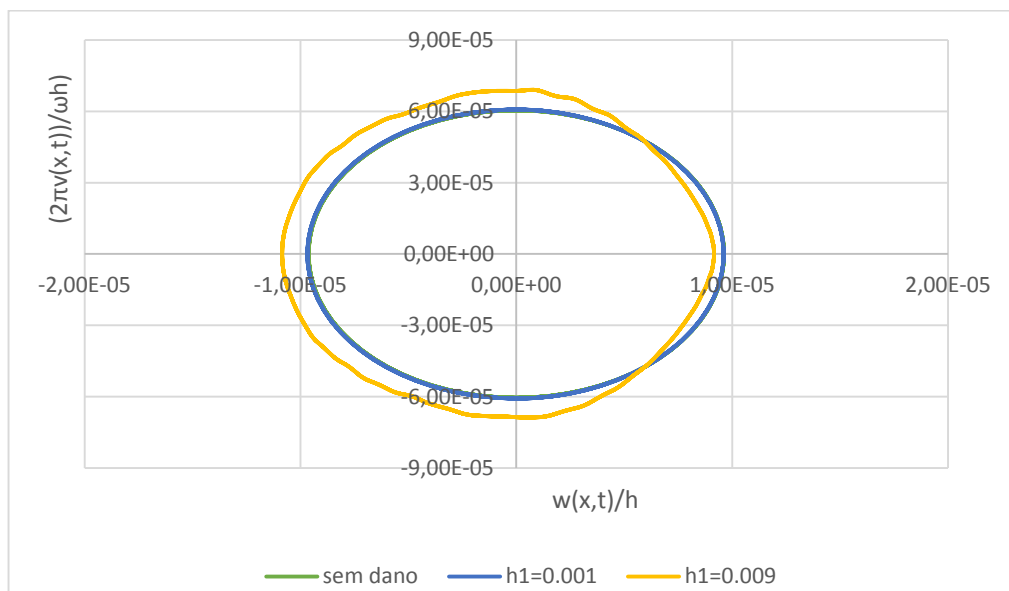


Figura 7. 6 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

É visível no caso CE1, com $h_I=0,02$, a existência de alguma interferência, no canto direito da órbita. Esta interferência no plano de fase corresponde à verificada na figura 7.2. Um aumento da escala nesta zona da projecção no plano de fase revela um número de cruzamentos igual a número de picos da resposta no tempo, como mostram as figuras 7.7 e 7.8.

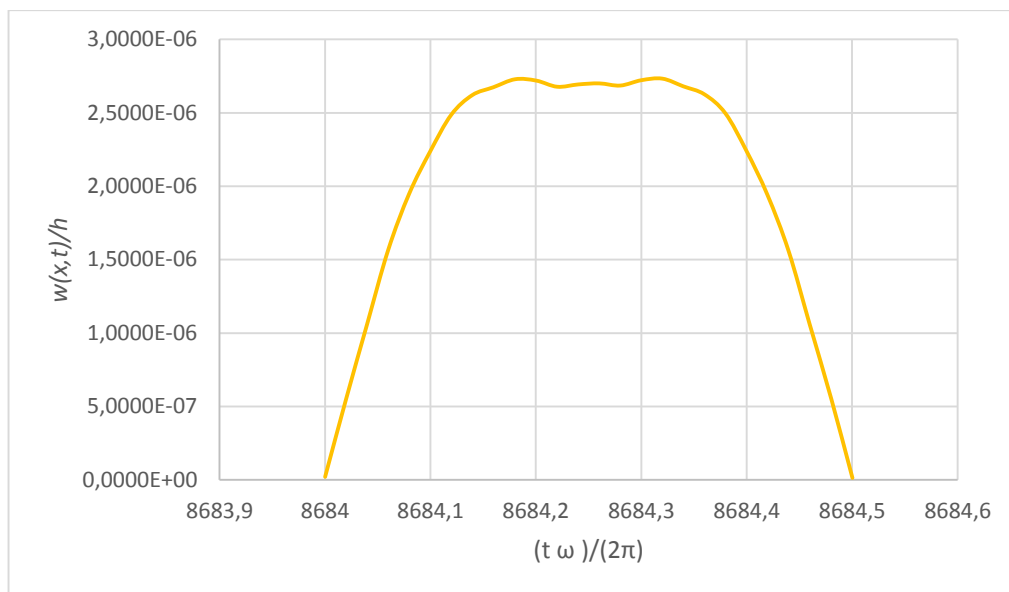


Figura 7. 7 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

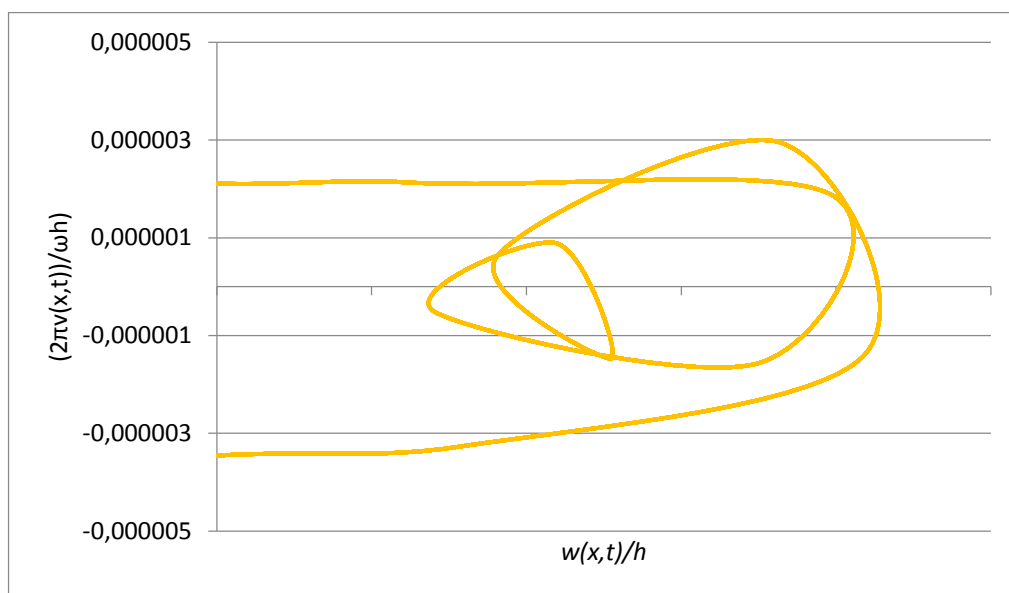


Figura 7. 8 -- CE1 Zoom Plano de Fase $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

O fenómeno visível nas figuras aparenta ser algum tipo de bifurcação. Andreus et al. ([3] e [4]) verificaram que a presença de uma fenda bilinear pode causar uma duplicação (ou mais) do período da resposta, por um fenómeno conhecido como *duplicação de período*. No entanto, os mesmos autores consideraram, na sua abordagem ao problema, a existência de contacto sem atrito entre as paredes da fenda, e esse não é o caso do presente estudo. Mais, apenas se verifica este efeito num caso específico e não em todos e, como será exposto na secção seguinte, apenas existe um ponto na secção de Poincaré, o que indica a existência de apenas um período na resposta do sistema, pelo menos na posição onde se dá o cruzamento com a secção de Poincaré. Como se verá mais adiante, apenas e só o caso CE1 voltará a apresentar

um comportamento semelhante. Outra hipótese será a existência de algum tipo de relação entre a geometria da viga (comprimento, espessura, etc.) e a frequência de excitação, que proporcione o aparecimento de algum tipo de interferência. Poderão também ser harmônicos devidos à não-linearidade das respostas.

Secção de Poincaré

As figuras 7.9 e 7.10 apresentam as secções de Poincaré obtidas para os casos CE1 e CE2 e apenas confirmam o que já se tinha concluído em relação á periodicidade das respostas.

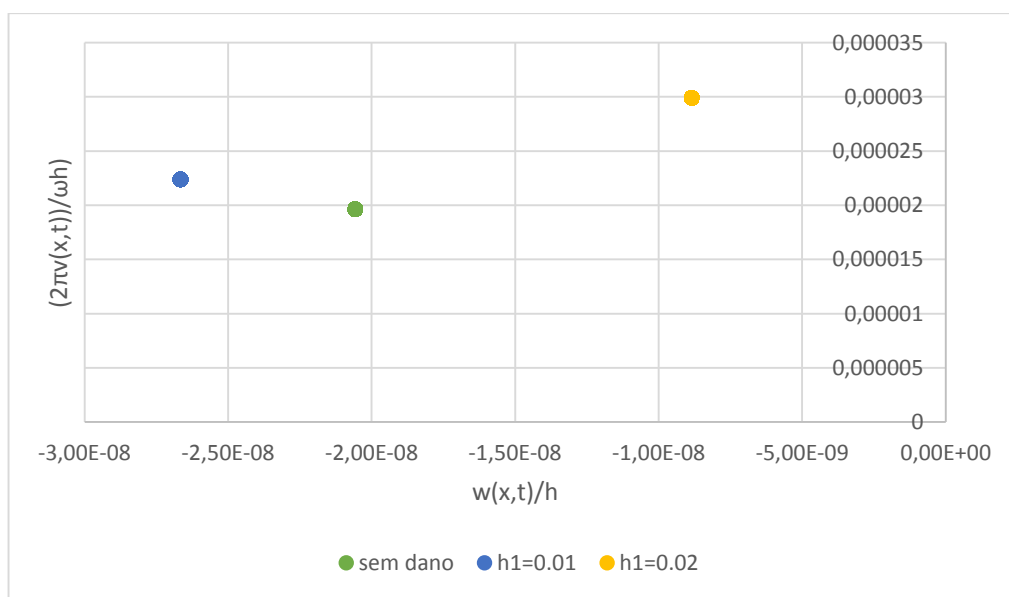


Figura 7. 9 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

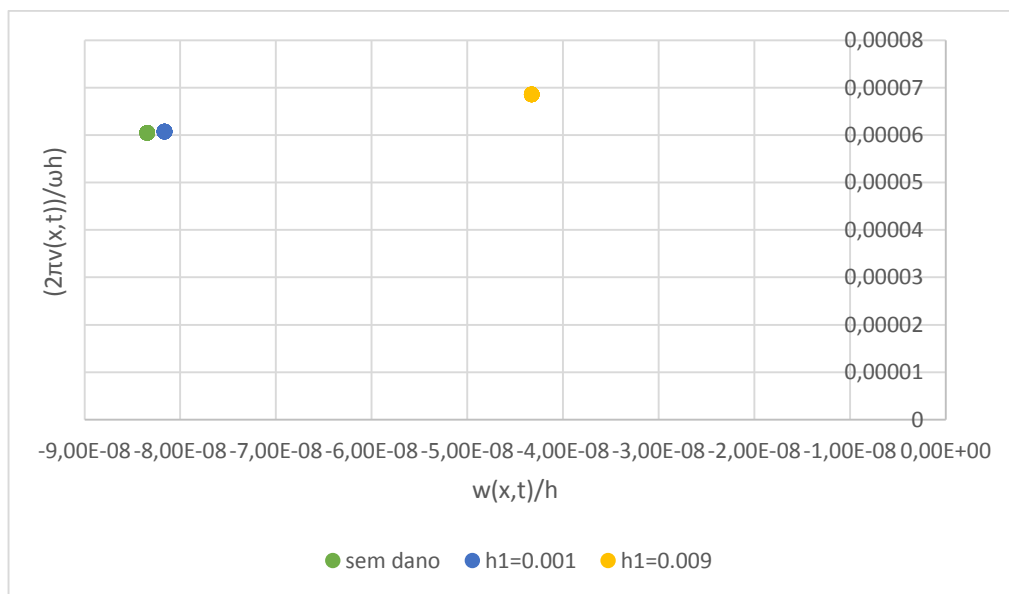


Figura 7. 10 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

A intersecção com a secção de Poincaré corresponde, em cada caso, a um ponto discreto, o que indica apenas uma frequência base e uma solução periódica de $k=1$. Portanto, diz-se que as soluções são lineares periódicas e não-lineares periódicas, respectivamente.

Espectro de amplitudes

Na figura 7.11, apenas são apresentados os espectros referentes aos casos intacto e de maior dano.

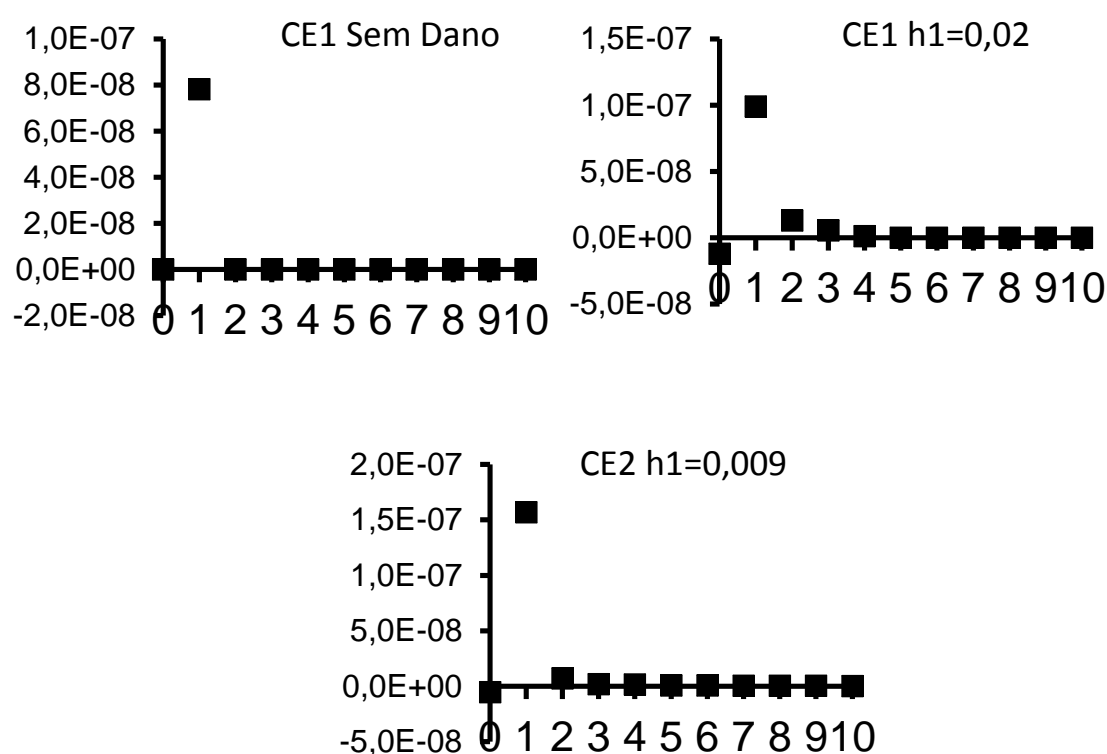


Figura 7. 11 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Tal como esperado, para a viga sem dano não existem harmónicos da frequência base. Confirma-se novamente que se trata de um sistema linear periódico. Os últimos dois espectros mostram que a existência de uma fenda, com comportamento bilinear, provoca o aparecimento de harmónicos. O caso CE1 $h_1=0,02m$, com a maior razão de profundidade apresenta não só harmónicos mais fortes como apresenta um terceiro harmónico e um quarto quase desprezável que poderão corresponder à intermitência no topo da resposta durante o movimento ascendente da viga. Confirma-se também a existência de harmónicos pares, prevista pela assimetria da resposta no tempo das projecções no plano de fase.

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Resposta no tempo

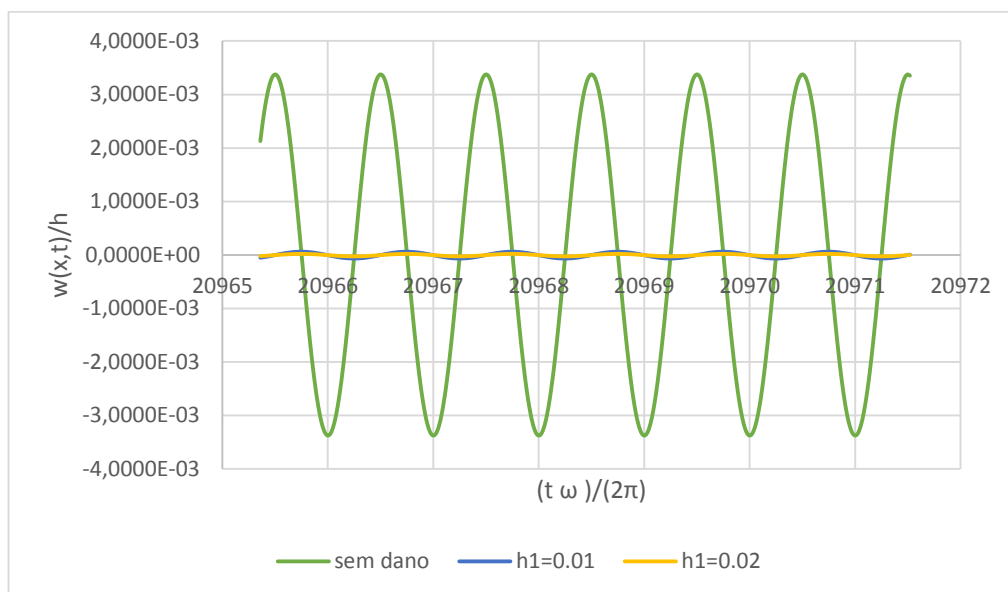


Figura 7. 12 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

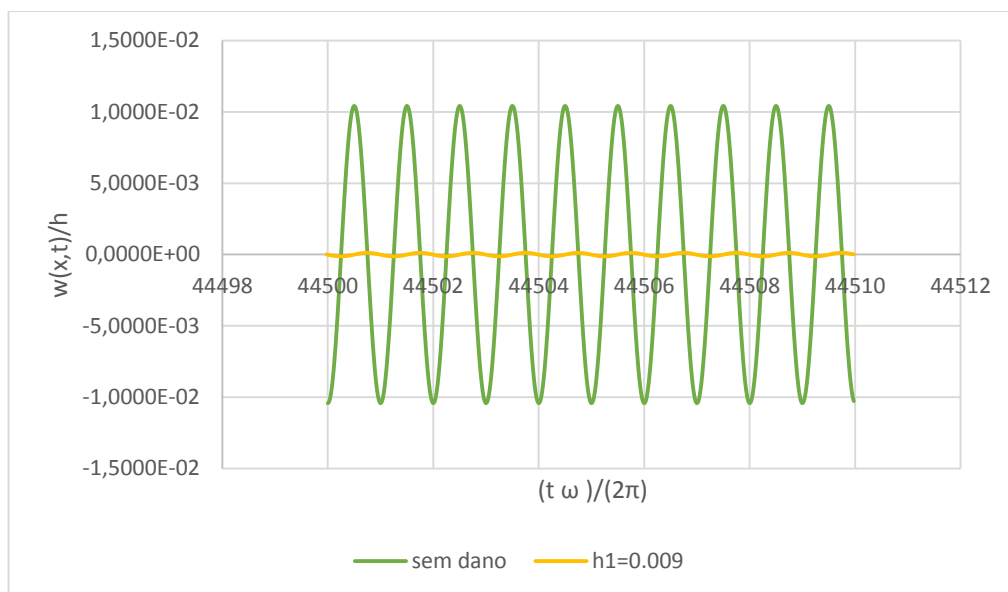


Figura 7. 13 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Nesta secção, analisa-se a resposta dinâmica a uma excitação harmónica de frequência igual à primeira frequência natural da viga sem dano. Nas figuras 7.12 e 7.13, é visível a diferença de amplitudes de resposta. No caso CE1, a amplitude das respostas do sistema com dano é de cerca de duas ordens de grandeza inferior à daquela do sistema intacto. No caso CE2, essa diferença chega a três ordens de grandeza. As figuras 7.14 e 7.15 mostram uma ampliação das respostas dos sistemas com dano.

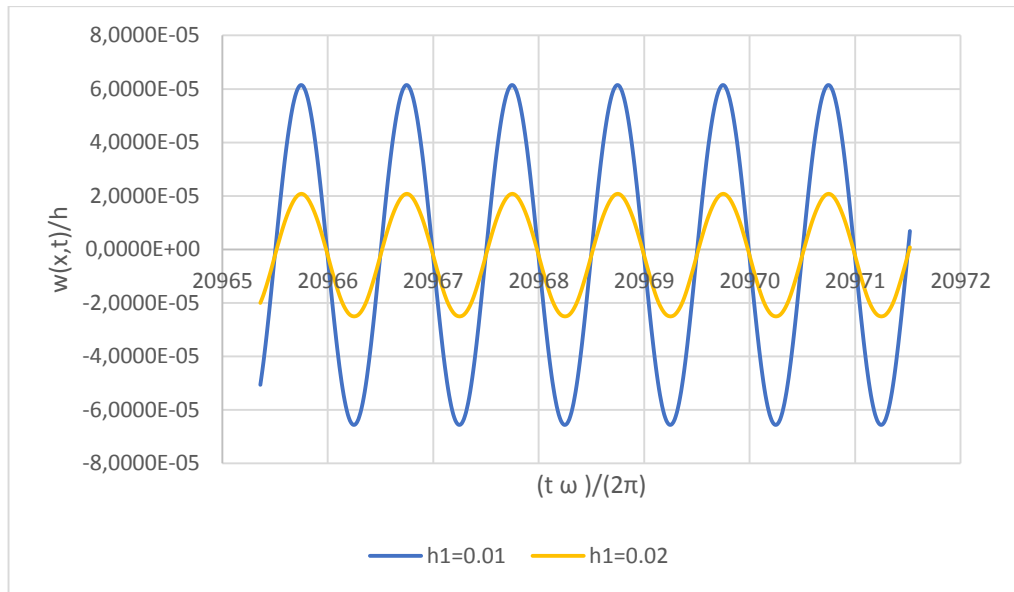


Figura 7. 14 - CE1 Zoom Resposta no Tempo com fenda. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

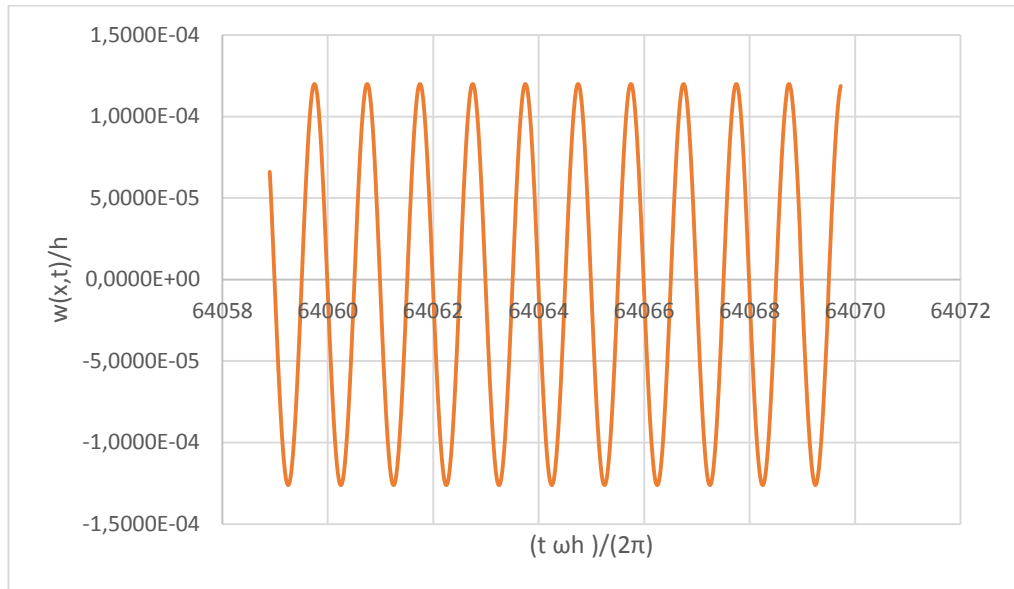


Figura 7. 15 - CE2 Zoom Resposta no Tempo com fenda. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

A disparidade das amplitudes das respostas é uma consequência da diminuição de rigidez provocada pela abertura da fenda, que por sua vez provoca uma diminuição das frequências naturais de vibração (equação. 6.1), de tal modo que a viga danificada não é excitada na sua zona de ressonância. A comprovar este facto, para além da diferença entre amplitudes, está o desfasamento no tempo, entre as respostas com e sem dano. Na verdade o desfasamento é entre as resposta dos sistemas e a força harmónica, que acaba por se reflectir num desfasamento entre elas próprias. Atente-se na figura 6.14, referente ao espectro do ângulo de fase. Nos exemplos do capítulo anterior, para uma excitação a um terço da frequência natural e para um amortecimento proporcional bastante baixo, o ângulo de fase entre respostas e

excitação harmónica será praticamente o mesmo em cada caso, de valor aproximadamente nulo. Para uma frequência de excitação tão elevada como a primeira frequência natural da viga intacta, essa aproximação já não pode ser feita, porque para a viga danificada a razão de frequências será superior à unidade e o ângulo de fase entre resposta e excitação será claramente diferente. A figura mostra uma evolução em degrau para sistemas não amortecidos. Tendo em conta o amortecimento proporcional utilizado (ver tabela 7.2), é visível que para a viga com fenda, com $\beta > 1$, o ângulo de fase será perto de π radianos, enquanto para a viga intacta, $\beta=1$, será $\pi/2$ radianos. Se as respostas, para a mesma excitação harmónica, têm diferentes defasamentos, então as duas respostas serão também elas defasadas no tempo, de uma diferença entre os dois ângulos de fase.

Em relação aos sinais apresentados nas figuras, conclui-se o seguinte. A resposta dos sistemas sem dano é sinusoidal, simétrica em relação às amplitudes e periódica. O sistema intacto é, tal como no capítulo anterior, linear periódico. Por seu lado, na presença de uma fenda com comportamento bilinear, a resposta é assimétrica, embora não de uma forma tão explícita, e aparenta ter um período bem definido. Novamente, são esperados também harmónicos pares no espectro de amplitudes. De notar, que no caso CE1 $h_1=0,02$ (figura 7.15), já não se verificam as interferências no topo do movimento ascendente da viga.

Projecção no Plano de Fase

Nas figuras 7.16 e 7.17, tal como na representação da resposta no tempo, também as diferenças entre dimensões das projecções no plano de fase são de diferente ordem de grandeza. Para a viga intacta, em ambos os casos, a projecção no plano de fase caracteriza-se novamente por uma órbita regular e fechada, típica de um sistema linear periódico de apenas uma frequência base. A órbita é simétrica e não sofre qualquer distorção pelo que não esperados harmónicos. Note-se que nestas duas figuras são visíveis no centro do referencial as órbitas dos sistemas com dano, de amplitudes muito inferiores.

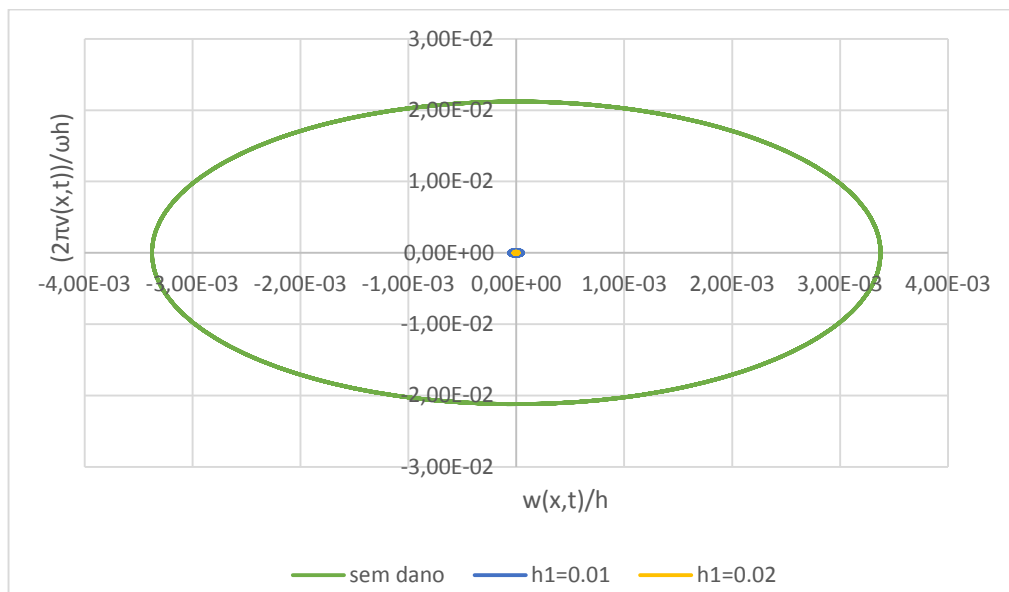


Figura 7. 16 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

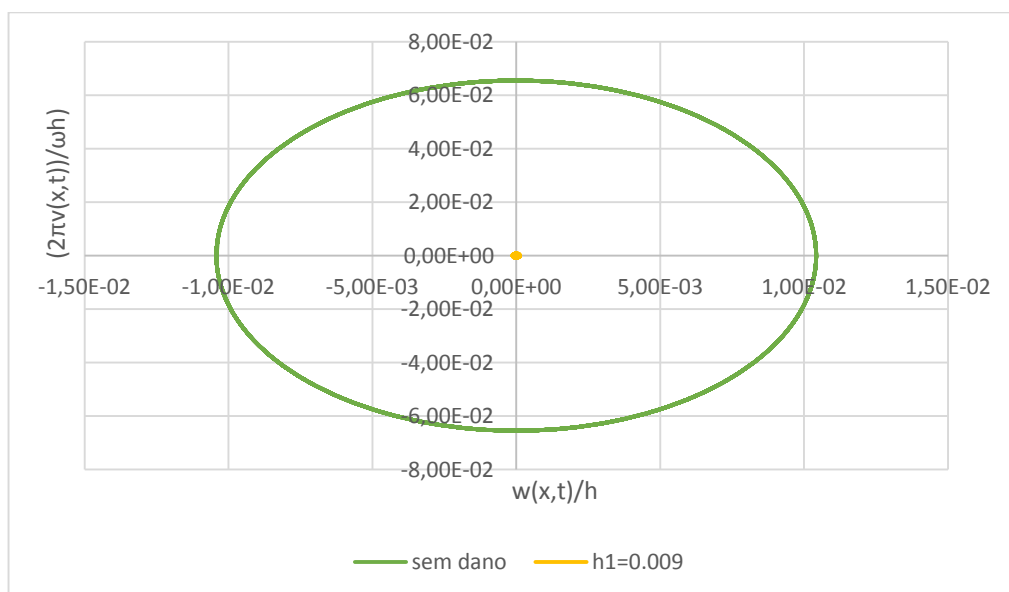


Figura 7. 17 - CE2 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

As figuras 7.18 e 7.19 mostram uma ampliação das projecções no plano de fase para as vigas com a maior de razão de profundidade da fenda.

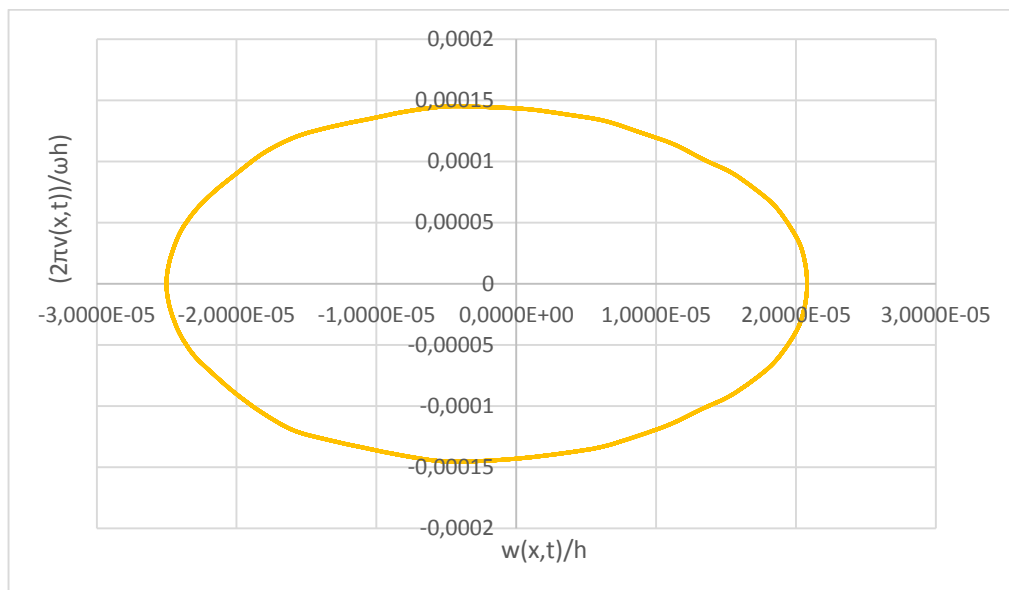


Figura 7. 18 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h1=0,02$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

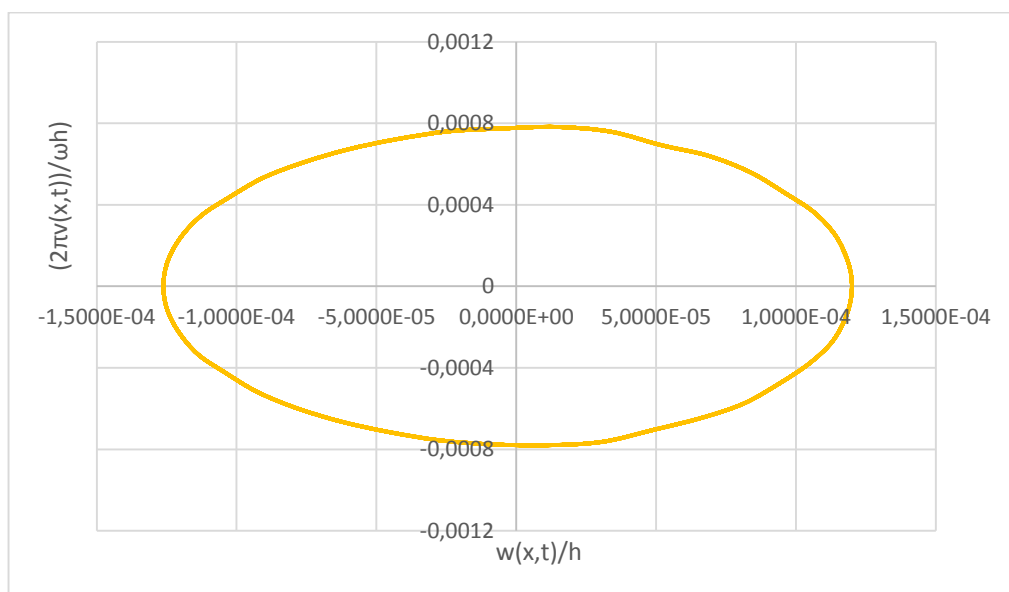


Figura 7. 19 - CE2 Zoom Resposta no Tempo $h1=0,009$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Em ambos os casos, a solução caracteriza-se por uma órbita fechada, muito próxima de uma elipse, assimétrica em relação às amplitudes de deslocamento, e apenas ligeiramente distorcida ao contrário do verificado no capítulo anterior, deixando assim antever a existência de harmónicos de baixa intensidade, tanto ímpares como pares. Por a solução no plano de fase ser uma órbita fechada de apenas um ciclo, então o sistema é claramente periódico e de apenas

uma frequência base. Espera-se portanto um sistema não-linear periódico, mas muito próximo de ser linear, anteendo-se quase imperceptíveis os harmónicos existentes.

Secção de Poincaré

Nas figuras 7.20 e 7.21, em todos os casos, a intersecção na secção de Poincaré corresponde a um ponto discreto, o que indica a existência de apenas um período de resposta. Se se confirmar a existência de harmónicos no espectro de amplitudes, o sistema será com toda a certeza não-linear periódico.

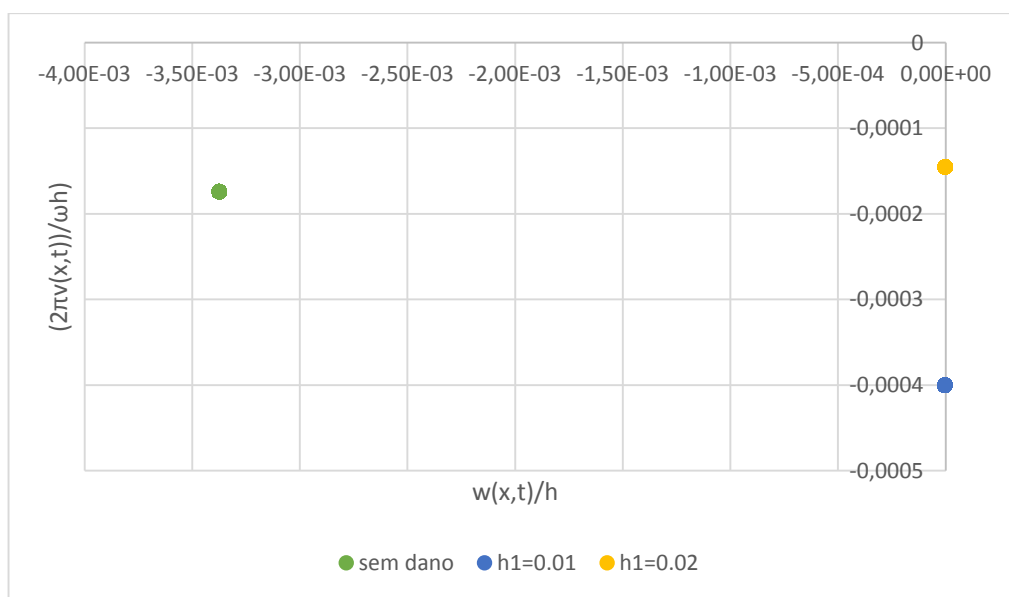


Figura 7. 20 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

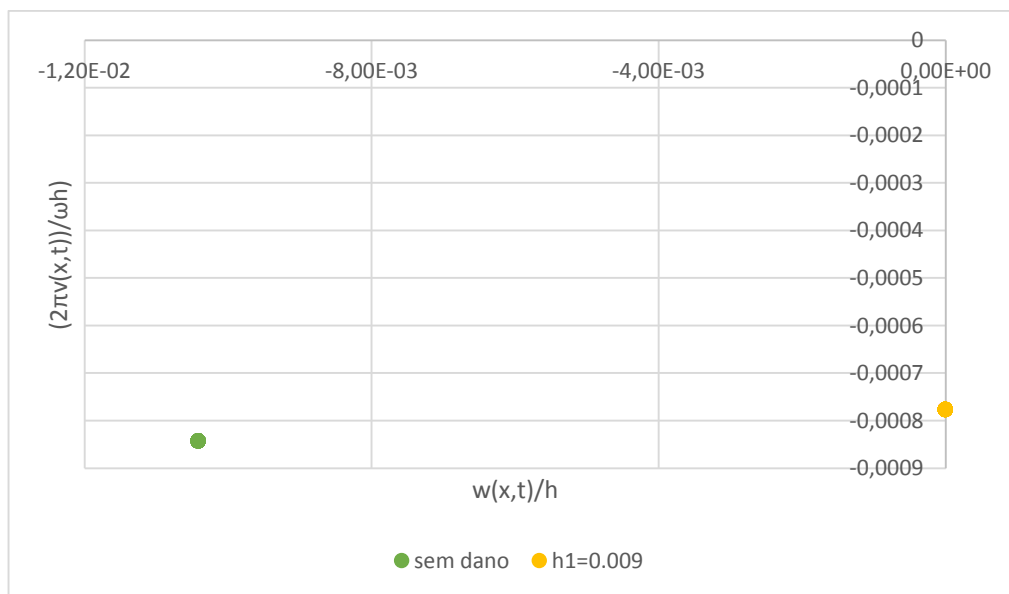


Figura 7. 21 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Verifica-se, devido à diferença entre as amplitudes da resposta, um afastamento brusco, na secção de Poincaré, entre os pontos representativos dos sistemas com e sem dano. Esta particularidade, que também é observada na resposta no tempo e na projecção no plano de fase, poderá ser interessante do ponto de vista de detecção de fendas, no sentido em que a existência de dano fará com que o sistema mantenha respostas de baixa amplitude, numa zona do espectro em que seria de esperar o contrário.

Espectro de amplitudes

A figura 7.22 apresenta o espectro de amplitudes relativos ao sistemas intacto e de maior dano, para cada caso de estudo.

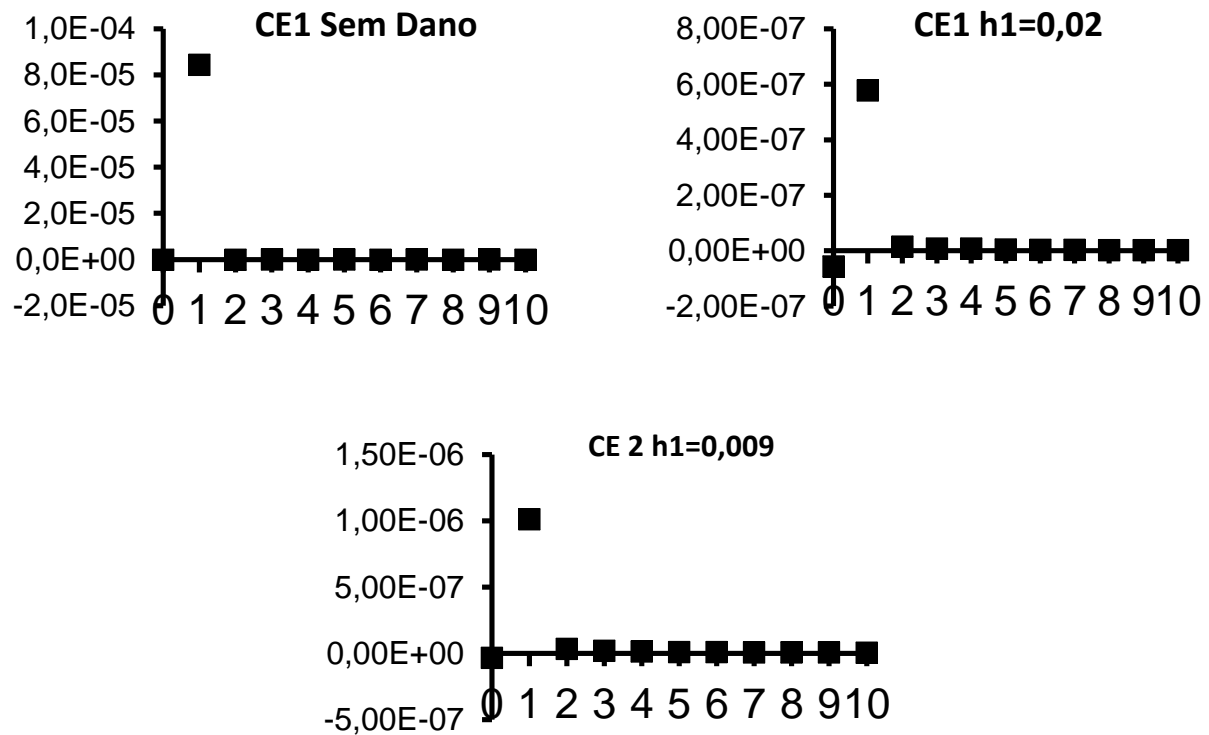


Figura 7. 22 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Para a viga intacta, tal como previsto, não existem harmónicos da frequência base confirmando-se que o sistema é linear de resposta periódica. Confirma-se ainda que o comportamento bilinear de abertura e fecho da fenda provoca o aparecimento de harmónicos, embora o seu efeito seja aqui bastante reduzido, como se pode observar nos espectros relativos

aos sistemas com dano. Observa-se que a acção do segundo harmónico é mais predominante no caso CE2 $h_1=0,009$, de maior amplitude de resposta (ver figuras 7.14 7.15), sendo este um harmónico par que resulta da assimetria da resposta no tempo.

Respostas para excitações harmónicas de frequência $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

A comparação directa entre os resultados dos dois capítulos anteriores mostra a existência de dois comportamentos vincadamente distintos. Para uma excitação de baixa frequência, $\beta < 1$, a resposta dinâmica é modelada pela geometria da viga e da fenda. Para a mesma viga, as amplitudes são de igual ordem de grandeza, e verifica-se que quanto maior a razão de profundidade de fenda h_1/h , maior será a amplitude da resposta no tempo e dos harmónicos da frequência base. Verifica-se também que quanto maior o comprimento, l , maior será a sensibilidade do sistema a um aumento da profundidade da fenda.

Por outro lado, para uma excitação próxima do valor crítico, conclui-se que a resposta é modelada principalmente pelas características materiais do sistema, no sentido em que existência ou não de ressonância irá implicar amplitudes de resposta de ordens de grandeza distintas. À primeira frequência natural da viga intacta, ω_1 , as amplitudes são muito elevadas na ausência de dano. A redução local de rigidez, provocada pela fenda, resulta num afastamento da zona de ressonância e numa razão de frequências maior do que a unidade, $\beta > 1$, fruto da redução das frequências naturais, pelo que as respostas serão de muito menor amplitude e desfasadas no tempo de um ângulo de aproximadamente $\pi/2$ rad, em relação à viga intacta. Verifica-se ainda que ao aumento da razão de profundidade de fenda maior será esse afastamento e, por isso, menor será a amplitude das respostas. É notória a menor excitação de harmónicos e uma atenuada não-linearidade do movimento de resposta. Conclui-se portanto que para esta excitação, com $\beta > 1$, a presença de uma fenda tem o efeito contrário àquele verificado para uma solução de baixa frequência.

Tendo em conta as diferenças apresentadas, será interessante analisar também qual o efeito de uma excitação harmónica à primeira frequência natural da viga com fenda e avaliar o tipo de resposta obtido. São apresentados resultados apenas relativos ao caso CE1 para o sistema intacta e para a fenda de maior profundidade, sendo fácil a extrapolação dos resultados para outros exemplos.

O comportamento bilinear do sistema implica que, durante o movimento oscilatório da viga, esta apresente dois valores distintos de rigidez ao longo de um período. O raciocínio mais fugaz levaria a pensar que existiriam também duas frequências naturais correspondentes a cada um dos valores de rigidez. No entanto, verifica-se a existência de um compromisso entre cada uma das partes do movimento bilinear, que se limitam uma à outra e definem um comportamento único e não composto por uma sobreposição de efeitos de duas partes distintas. Nesse sentido, Douka et al [17]., entre outros autores, apresentam a seguinte expressão para a frequência bilinear de uma viga:

$$\omega_b = \frac{2\omega_1\omega_{1d}}{\omega_1 + \omega_{1d}} \quad (7.1)$$

onde ω_1 é frequência natural da viga intacta e ω_{1d} a frequência natural da viga com fenda, permanentemente aberta. Para o caso CE1, obtém-se:

$$\omega_b = \frac{2 \times 1634,3696 \times 1435,0237}{1634,3696 + 1435,0237} = 1528,2232 \text{ rad/s} \quad (7.2)$$

Resposta no tempo

De forma a ser visível o impacto desta frequência bilinear no movimento do sistema, serão expostas, na figura 7.23, as respostas da viga com dano para excitações às frequências ω_{1d} e ω_b .

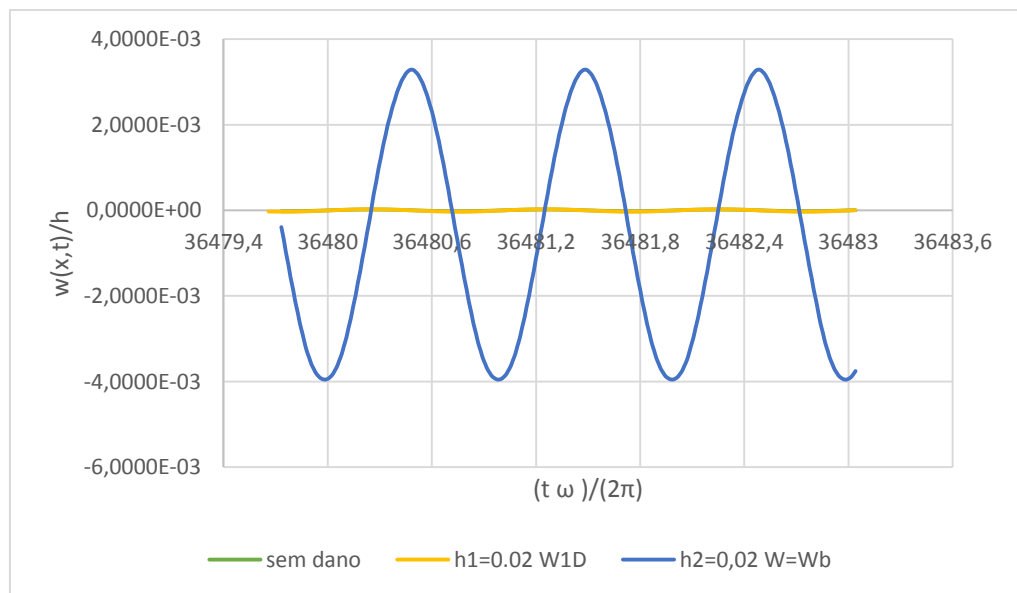


Figura 7. 23 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

Antes de se proceder à análise das características das respostas, faça-se a seguinte observação às amplitudes do movimento, para as duas frequências de excitação. Verifica-se que, na presença da fenda, a amplitude da resposta para a excitação à frequência bilinear é de cerca de duas ordens de grandeza superior àquela da viga intacta. Esta disparidade valida de forma inequívoca o conceito de frequência bilinear introduzido, uma vez que se demonstra que a viga com dano é excitada na sua zona de ressonância. Atente-se na figura 7.24. Note-se que a resposta sem dano é sempre referente à frequência de excitação bilinear, que é superior a ω_{1d} !

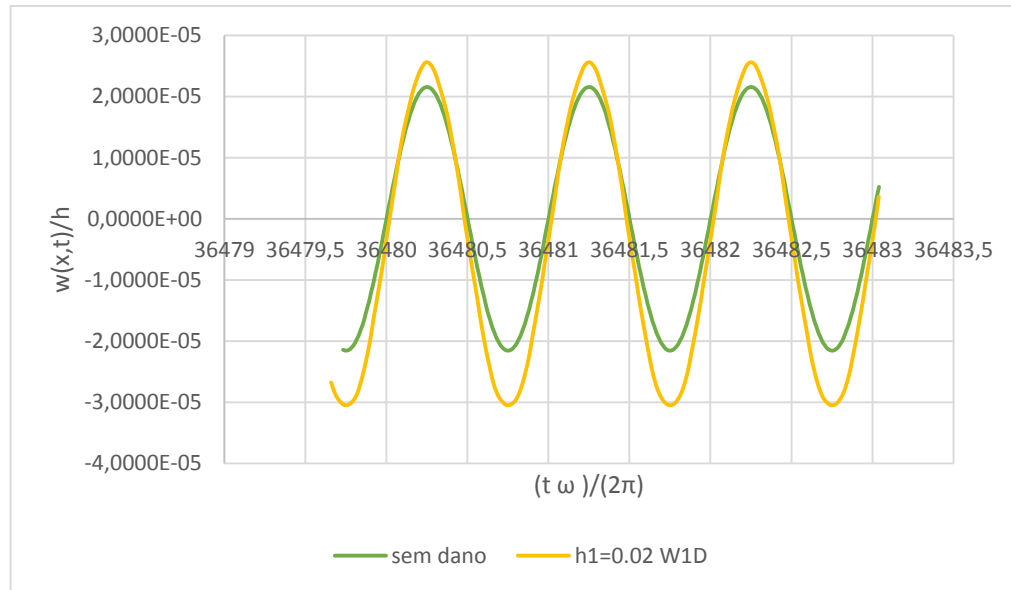


Figura 7. 24 - CE1 Zoom Resposta no Tempo. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

A excitação à frequência ω_{1d} é claramente afastada da ressonância e apresenta mesmo amplitudes de uma excitação de baixa frequência, pelo que se espera que seja uma resposta modela pela geometria da viga e que apresente harmónicos relativamente intensos.

No que respeita à resposta da viga sem dano, observa-se que esta é sinusoidal, simétrica em relação às amplitudes e de período constante. Apresenta um traço uniforme e uma envelope plana, o que indica que o sistema intacto é periódico.

Por seu lado, a solução obtida à frequência bilinear é sinusoidal com *offset*, ou seja, é assimétrica. Uma assimetria deixa antever a presença de harmónicos da frequência base. Aparenta no entanto ser periódica e verifica-se ter um traço uniforme e envelope plana, pelo que se espera existirem harmónicos pares no espectro. Verifica-se um desfaseamento de um ângulo de quase igual a $\pi/2$ rad, que reforça a anterior justificação referente à dinâmica de baixa frequência da resposta para ω_{1d} .

Projecção no plano de fase

Tal como na representação da resposta no tempo, as projecções no plano de fase, originam órbitas desproporcionadas. Atente-se no centro das figuras 7.25 e 7.26. São visíveis as órbitas relativas ao sistema sem dano, com uma excitação $\omega = \omega_b$, e do sistema com dano, com uma excitação $\omega = \omega_{1d}$.

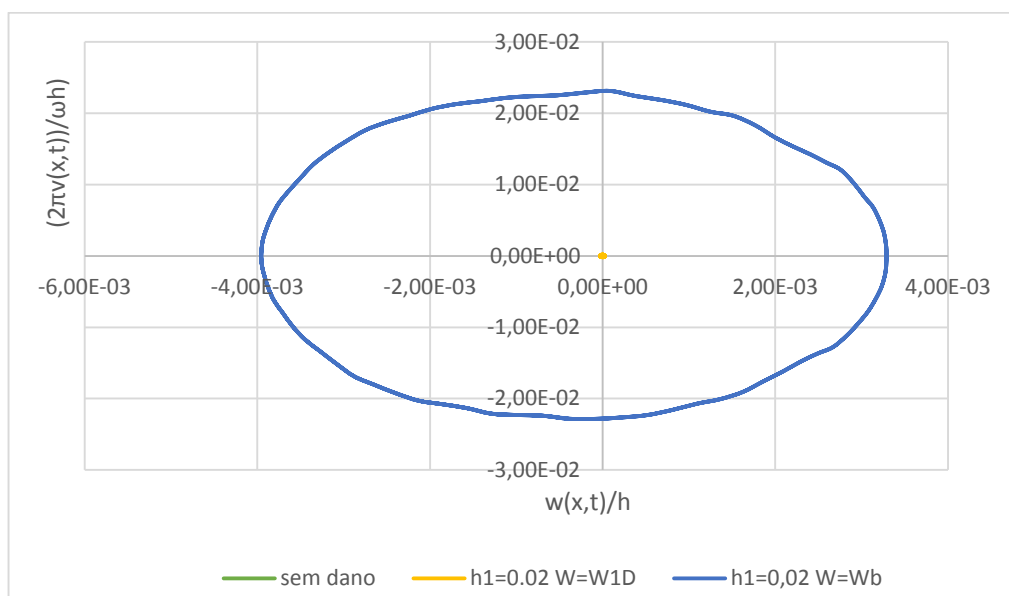


Figura 7. 25 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

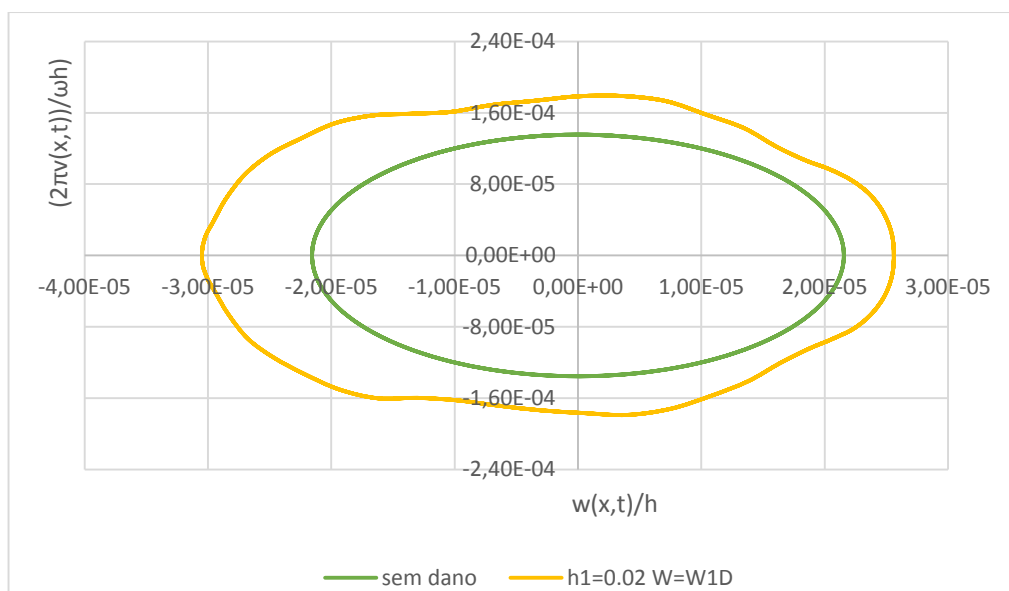


Figura 7. 26 - CE1 Zoom Plano de Fase. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

É interessante verificar que, para além das diferentes proporções, a órbita no plano de fase para a resposta à frequência ω_{1d} apresenta uma maior distorção do que a verificada para a

frequência ω_b . Conclui-se desta forma que a primeira é referente, ou pelo menos próxima, de uma solicitação de baixa frequência, mais dependente da geometria da viga e da fenda, do que propriamente da frequência de excitação. Só desta forma se justifica o porquê de, para uma frequência de excitação inferior ($\omega_{1d} < \omega_b$), a viga com dano apresentar amplitudes superiores à da intacta. Ou seja, a presença de uma fenda bilinear no sistema é suficiente para que este seja visivelmente perturbado, e a sua geometria potencia esse efeito.

Para a viga intacta, a solução descrever uma órbita fechada, simétrica e não distorcida, no plano de fase. Não são esperados harmónicos e antecipa-se que o movimento seja linear periódico. Na presença de dano, a solução caracteriza-se por uma curva também ela fechada, mas assimétrica e distorcida. Como já referido, a distorção é tanto maior quanto menor for a de razão de frequências ou, de outro ponto de vista, o efeito da bilinearidade da fenda é sobreposto pelas amplitudes elevadas do movimento. Órbitas fechadas indicam soluções periódicas, logo antecipa-se que o sistema com dano será não linear periódico.

Secção de Poincaré

Na figura 7.27, em todos os casos, e independentemente da frequência de excitação, verifica-se que a intersecção com a secção de Poincaré corresponde a um ponto discreto, ou seja, todas as respostas são periódicas de apenas uma frequência. Confirma-se que o sistema intacto é linear periódico e que, na presença de uma fenda bilinear, se converte num não-linear periódico.

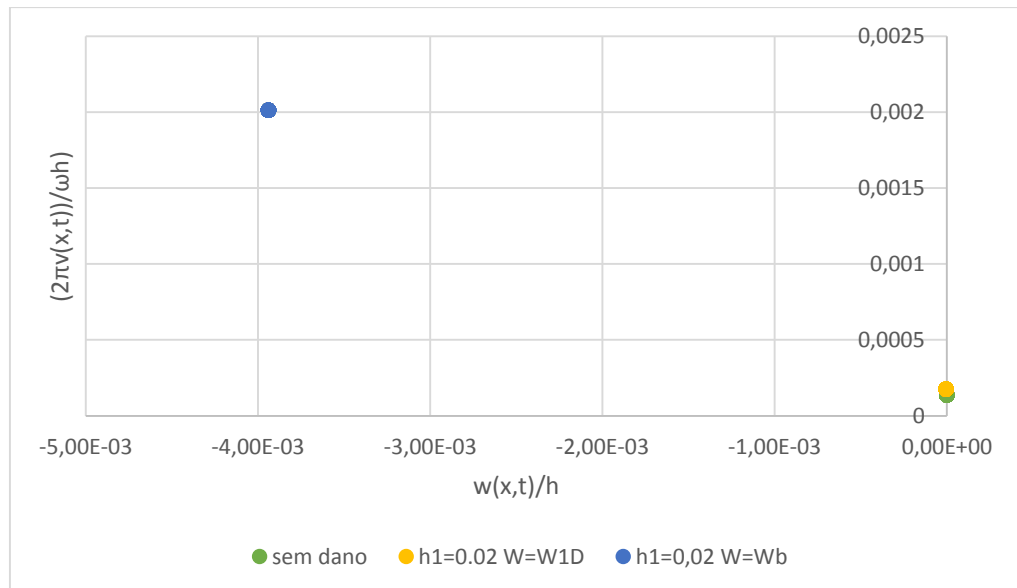


Figura 7. 27 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

Espectro de amplitudes

Na figura 7.28 é visível que para uma excitação à frequência natural bilinear da viga com dano ω_b , tal como na secção anterior, não existem harmónicos de grandes amplitudes. Aliás são quase desprezáveis.

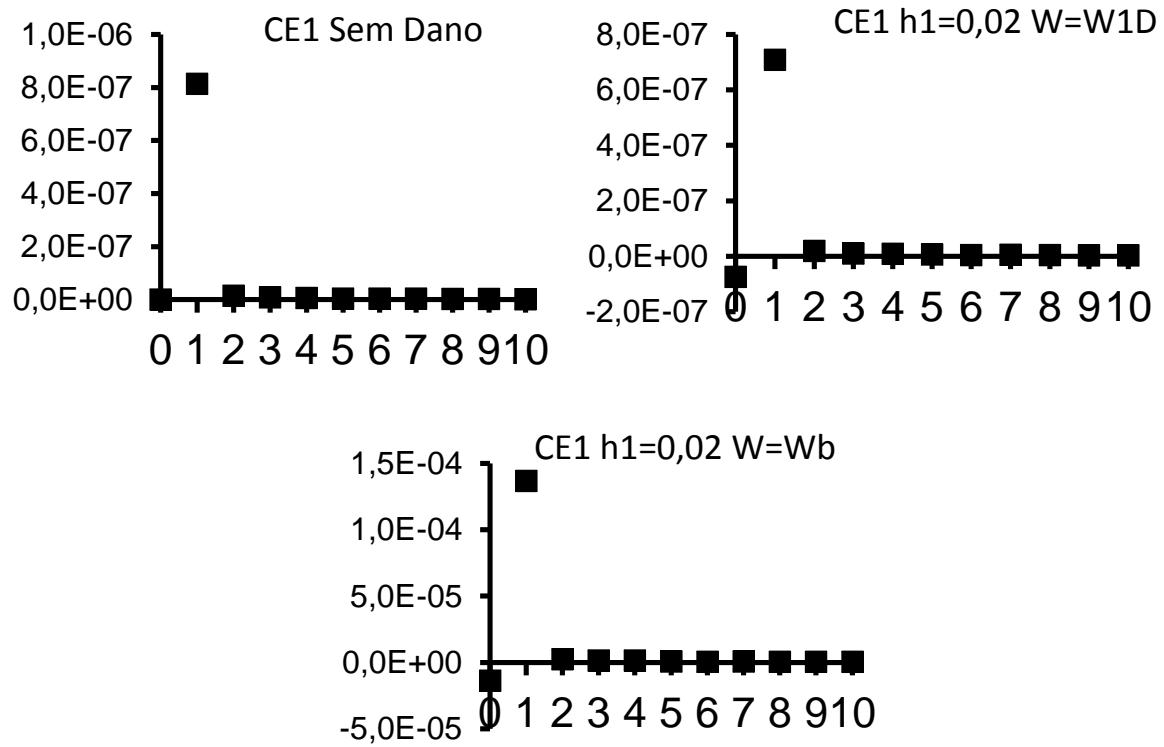


Figura 7. 28 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$ e $\omega = \omega_b$

7.2.2 Resposta em Regime Transiente

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

As figuras 7.29 e 7.30 mostram a resposta no tempo dos sistemas CE1 e CE2, no instante de abertura da fenda, para $t_{dano} = 75s$. Os casos doravante analisados serão sempre referentes à maior profundidade de fenda.

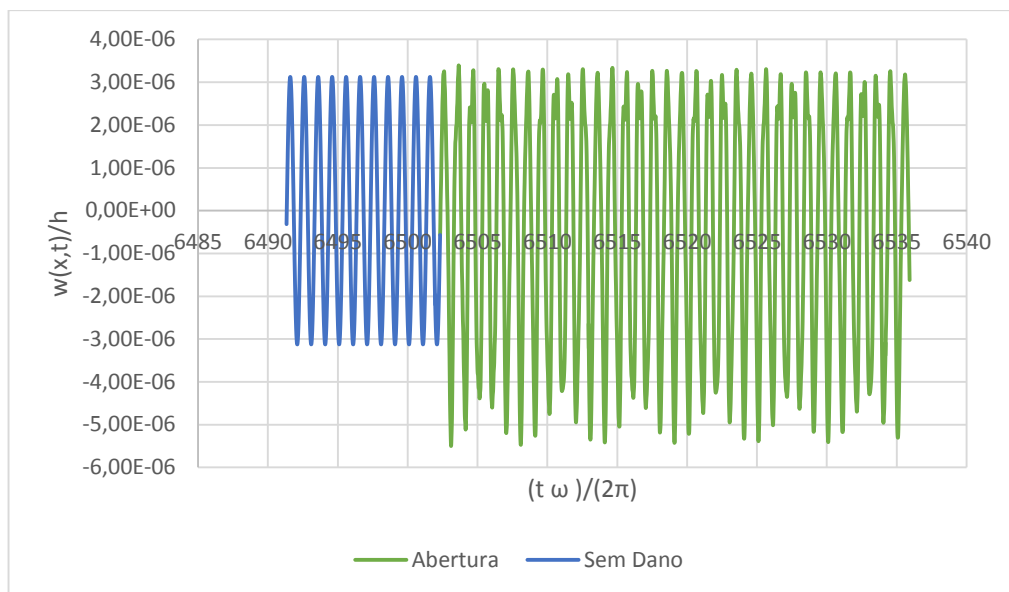


Figura 7. 29 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

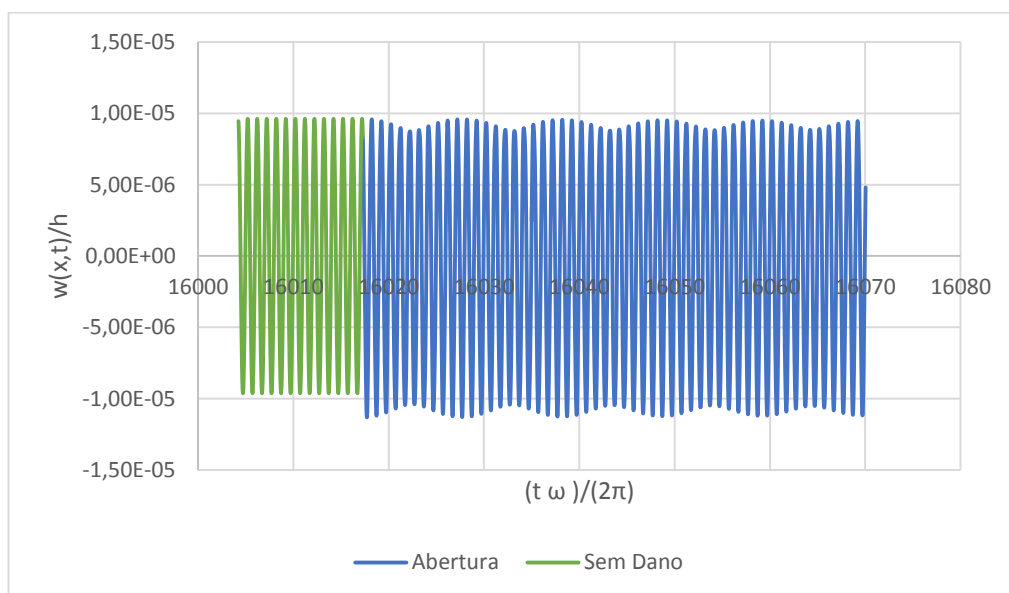


Figura 7. 30 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Nos instantes após a abertura da fenda as respostas obtidas são fortemente assimétricas. Em ambos os casos, verifica-se um aumento de amplitude moderado do movimento descendente, enquanto no caso CE1, existem ainda alguns picos de amplitude ligeiramente superior para o movimento ascendente. As figuras mostram que existe mais do que uma frequência a modelar a solução, após abertura da fenda.

A resposta do caso CE2 apresenta claramente duas frequências. Uma rápida que se manterá em regime permanente e outra lenta, que se dissipará com o tempo. O transiente aparente ser bastante suave e ordenado. Na figura 7.31, é visível a rápida evolução do sistema

no sentido da resposta estacionária, aos 0,6s após a abertura da fenda, onde as amplitudes de resposta estão muito mais atenuadas. Conclui-se que o movimento no caso CE2 é não-linear, caracterizado por oscilações quási periódicas temporárias, de duas frequências. [20].

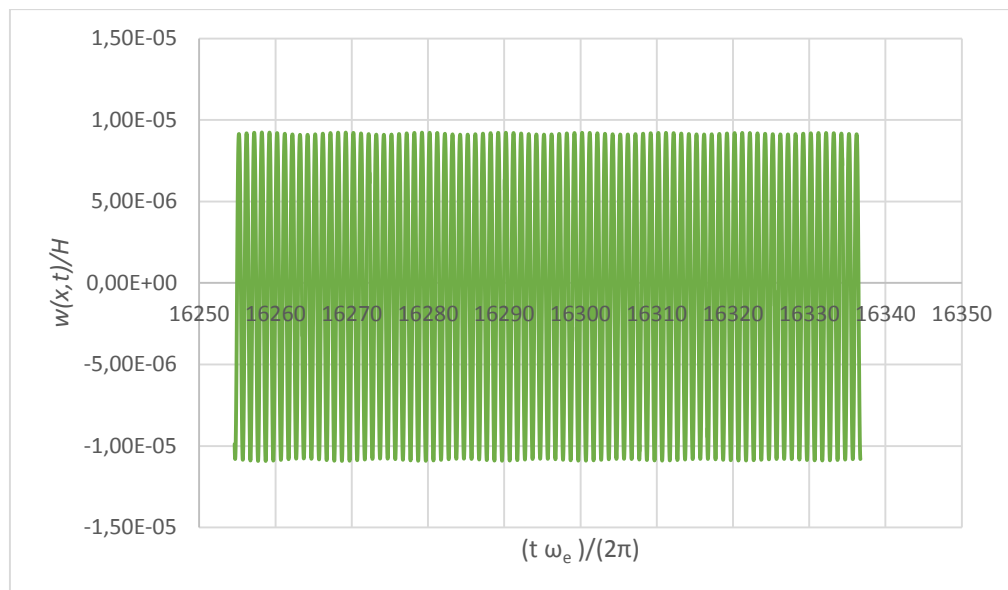


Figura 7. 31 - CE2 Resposta no Tempo 0,6s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

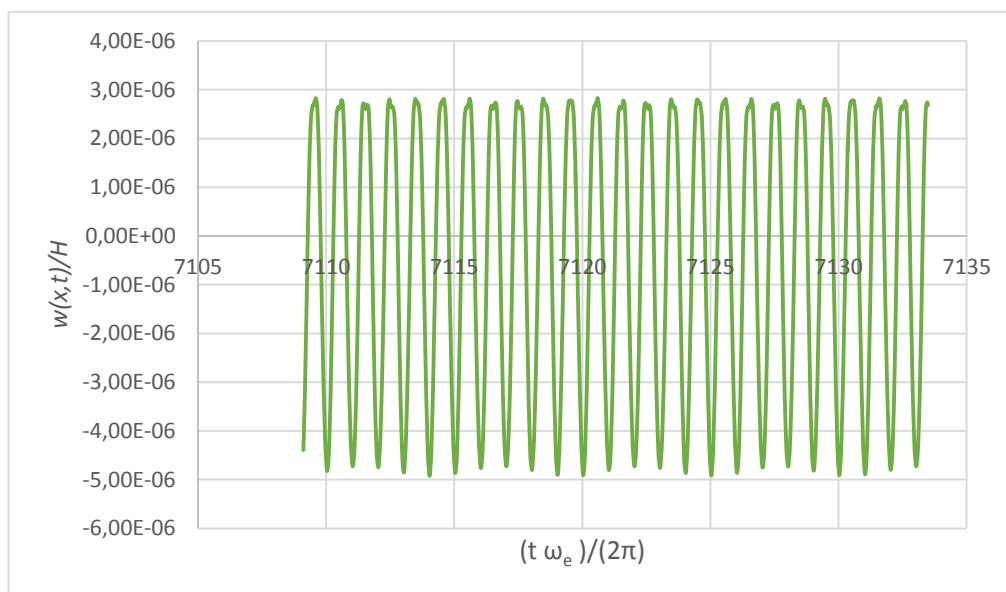


Figura 7. 32 - CE1 Resposta no Tempo 15s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

O sistema CE1 aparenta ser bastante mais instável. Verifica-se uma clara diferença entre os traços superior e inferior da resposta. No movimento descendente, a resposta é claramente modelada por duas frequências, embora não se verifique uma homogeneidade nas amplitudes durante os períodos iniciais, como no caso CE2. O movimento ascendente caracteriza-se por alguma intermitência. A resposta aparenta ter mais do que duas frequências, talvez três, mas tal afirmação necessita de outros meios de análise para ser confirmada. Esta

instabilidade resultará num transiente de dissipação bastante mais lenta, com duração superior a 15s, como se observa na figura 7.32. Neste momento, nada mais é possível inferir qualitativamente acerca do movimento deste caso, a não ser a não-linearidade do transiente.

Projectão no plano de fase

A projectão no plano de fase das soluções dos dois sistemas dá origem a resultados semelhantes, mas que explicitam novamente diferenças na estabilidade das respostas transientes.

As figuras 7.33 e 7.34 mostram a evolução das soluções obtidas desde o início do transiente até à estabilização em regime permanente. Após a abertura da fenda, verifica-se um aumento das dimensões das órbitas, quer para as amplitudes de deslocamento como para as de velocidade. É importante referir também que nenhuma das órbitas fechará a sua trajectória até que seja atingido o regime estacionário e que são feitos inúmeros cruzamentos no plano, mais explícitos no caso CE1.

Tanto para o caso CE1 como para o CE2 as órbitas no plano de fase apresentam distorções, o que indica a presença de harmónicos e sub-harmónicos das frequências que modelam o movimento. Verifica-se que a variação do trajecto das soluções no tempo é feito sempre em torno de uma posição de equilíbrio, que é definida pela órbita obtida em regime permanente após a dissipação total do transiente. Tal pode ser observado nas figuras seguintes.

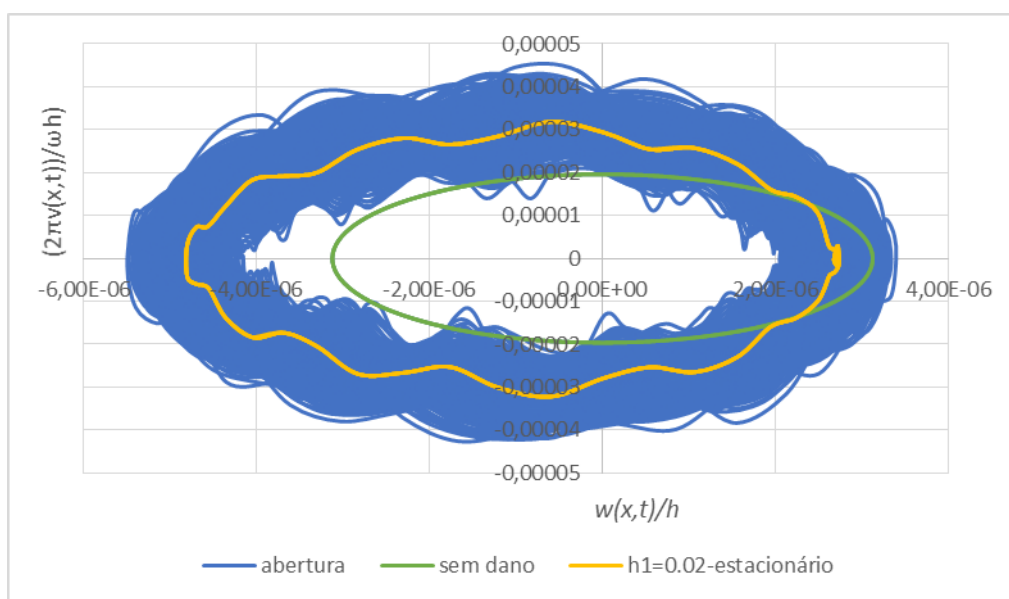


Figura 7. 33 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

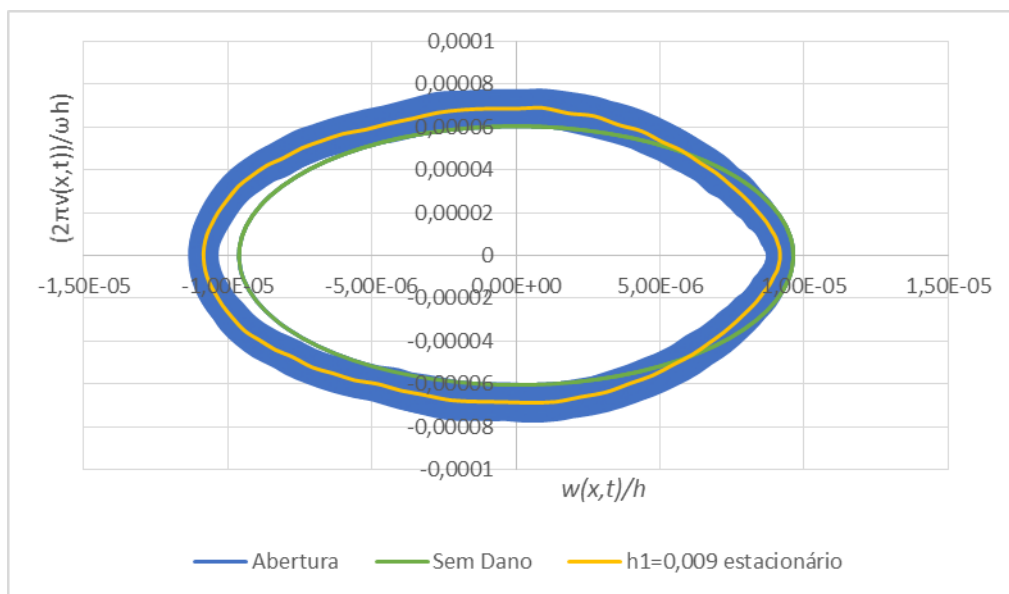


Figura 7. 34 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

O resultado final é uma nuvem representante da evolução no tempo da solução transiente no plano de fase, onde se verifica ao centro a posição final de equilíbrio. Esta é uma característica próxima da de uma solução quase periódica; que no entanto tende para uma única órbita fechada devido ao efeito de dissipação do transiente. Novamente se conclui que o transiente é não linear e que poderá também ser definido por oscilações temporárias de duas frequências [20]. De referir ainda que, tal como na representação da resposta no tempo do caso CE1, observa-se alguma intermitência, devido à instabilidade inicial do seu transiente.

Secção de Poincaré

As figuras 7.35 e 7.36 apresentam a evolução da resposta dos sistemas CE1 e CE2 na secção de Poincaré. Verifica-se uma evolução em espiral desde o ponto mais exterior, do regime estacionário do sistema sem dano, até ao ponto central, do regime estacionário dos sistemas com dano. Embora possa não ser aparente esta evolução da solução, tal comportamento é apresentado de forma clara na figura 7.37, referente ao caso CE2. Nela é patente uma correspondência, entre os pontos dos diferentes ciclos, bem definida. Mais uma vez, se verifica a existência de ordem na resposta transiente, que afasta de vez a possibilidade de caos.

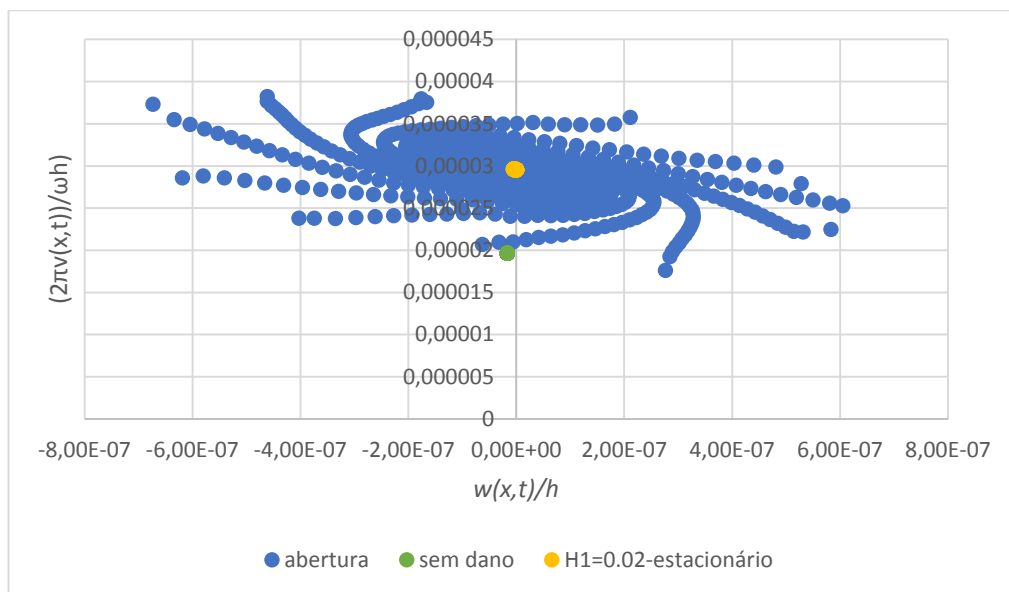


Figura 7. 35 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1/3}$

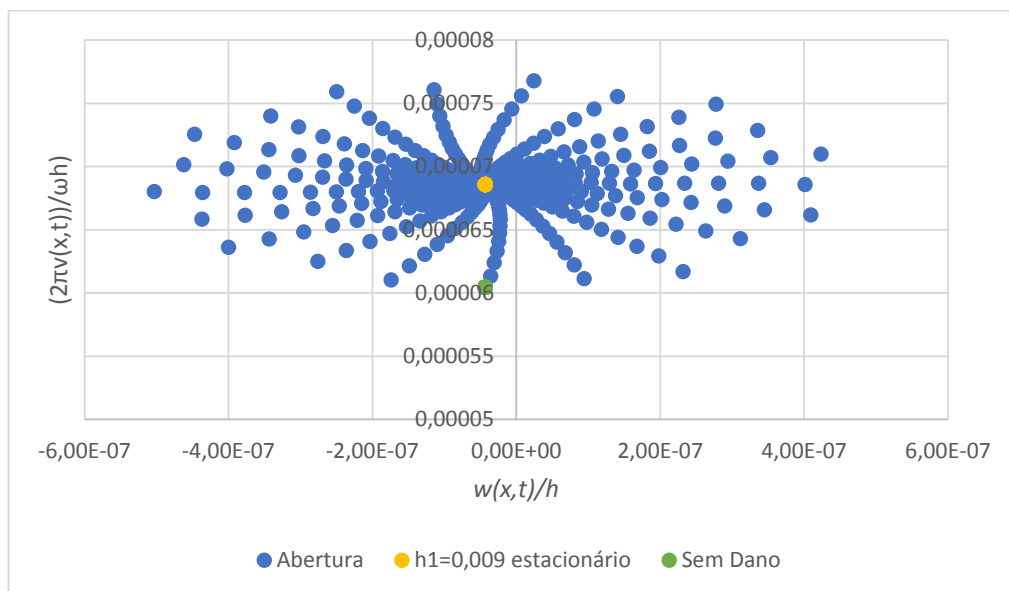


Figura 7. 36 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1/3}$

O facto de se verificar uma evolução em espiral, parece indicar que a resposta transiente apresenta características de um movimento quase periódico de duas frequências que, na secção de Poincaré se caracteriza por uma órbita de pontos fechada e regular. No entanto, a perda de amplitude devido à dissipação energética ao longo do tempo fará com que a solução tenda para um novo equilíbrio dinâmico periódico.

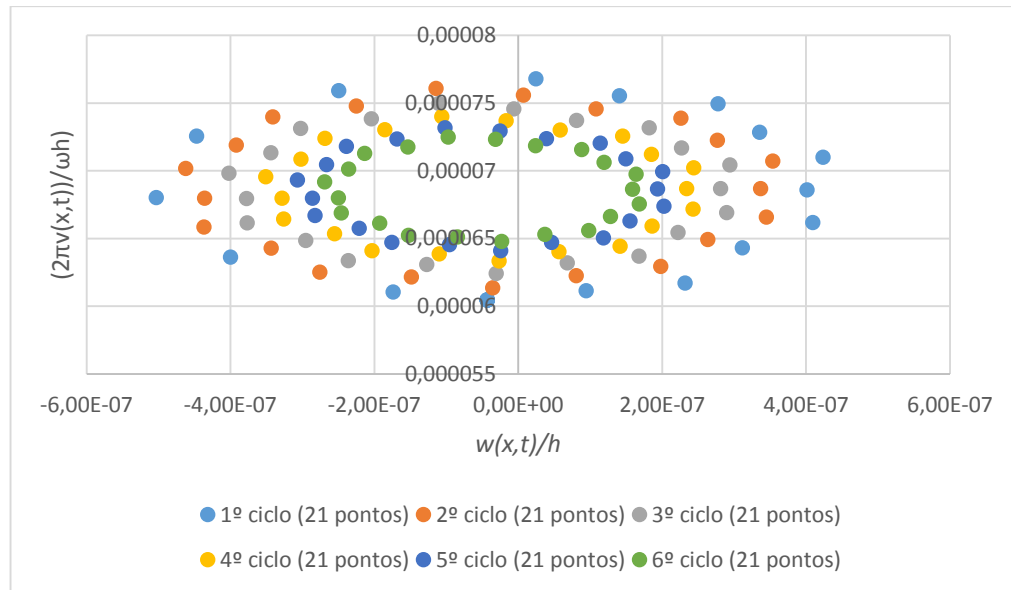


Figura 7. 37 - CE2 Evolução na Secção de Poincaré. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Uma justificação plausível para a característica quase periódica do transiente será a própria natureza harmónica da excitação. Franco e Pauletti. [20] apresentam a seguinte explicação para a natureza das oscilações deste tipo de transientes:

“The nonlinear oscillator and the external force exchange energy back and forth so that the system energy oscillates during the transient. The damping term ensures the approach to an equilibrium state, while energy oscillations decrease”. (Franco e Pauletti 1995)

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Resposta no tempo

Foram definidos dois instantes de tempo diferentes para a abertura da fenda. Para o sistema CE1, a transição dá-se para $t_{dano} = 65s$, enquanto para o sistema CE2, $t_{dano} = 75s$. A figura 7.38 mostra o instante de abertura da fenda para caso CE2. Uma resposta idêntica foi conseguida para o caso CE1. Verifica-se um pequeno aumento da amplitude na parte inferior da resposta. Logo de seguida é iniciado um decaimento acentuado das amplitudes. O fenómeno é explicado pelo afastamento da frequência de ressonância, no mesmo instante em que abre a fenda. A acompanhar o decréscimo das amplitudes, identifica-se a existência de um transiente ordenado e não caótico, cujo movimento é caracterizado por duas frequências, uma rápida de igual valor à de excitação, e que se manterá enquanto esta durar, e uma outra lenta de efeito temporário.

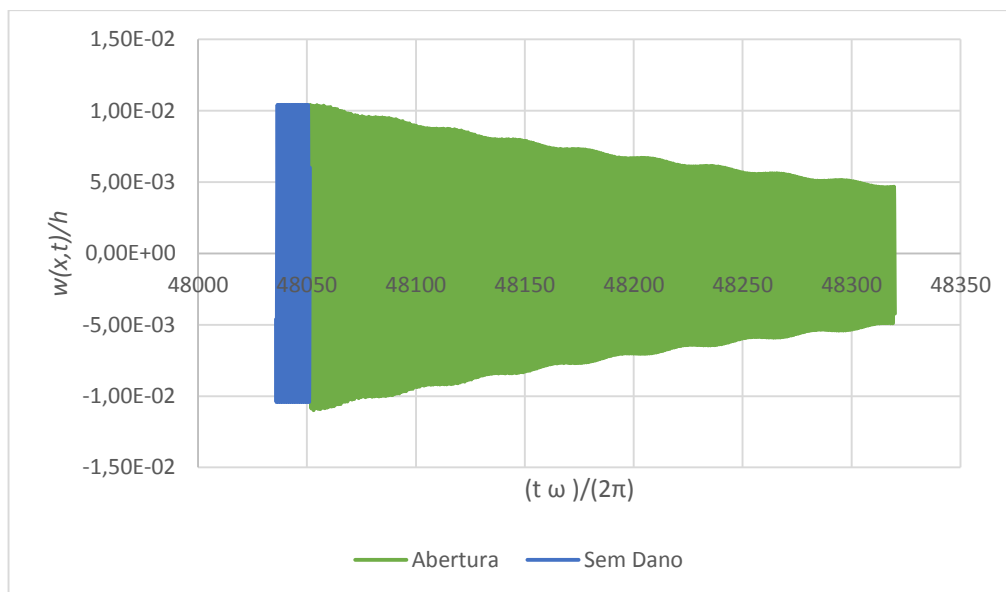


Figura 7. 38 - CE2 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

As respostas transientes caracterizam-se por duas etapas diferentes. Uma primeira fase, apresentada na figura anterior, onde a resposta é principalmente modelada por um decaimento das amplitudes bastante acentuado, e uma segunda fase para a qual as amplitudes variam entre intervalos bem definidos e onde a resposta é modelada em amplitude. Será de todo o interesse analisar com mais atenção esta segunda fase da resposta dos sistemas.

Verifica-se que o transiente tem um efeito predominante após o decaimento das amplitudes. Quase 10 segundos após a abertura da fenda no caso CE1, e cerca de 2 segundos no caso CE2, a amplitude mínima do movimento já será muito próxima da verificada em regime permanente, mas a amplitude máxima é bastante mais elevada, como é visível nas figuras 7.39 e 7.40.

O aparente potenciamento do transiente será apenas uma ilusão. Na verdade, o decaimento das amplitudes é muito mais rápido do que a dissipação energética do sistema, ou seja, a resposta transitória ainda está numa fase inicial, de amplitude elevada, e a resposta permanente já praticamente estabilizou e encontra-se próxima do que será no fim do transiente. Este fenómeno é conhecido por modelação em amplitude da resposta. Na figura 7.41, aos 15 segundos após a abertura da fenda, a resposta do caso CE1 apresenta uma amplitude máxima aproximadamente três vezes menor. Essa perda é quase exclusiva da resposta transiente e observa-se um pequeno ganho na amplitude mínima. O mesmo se verifica no caso CE2, na figura 7.42, aos 5 segundos após abertura.

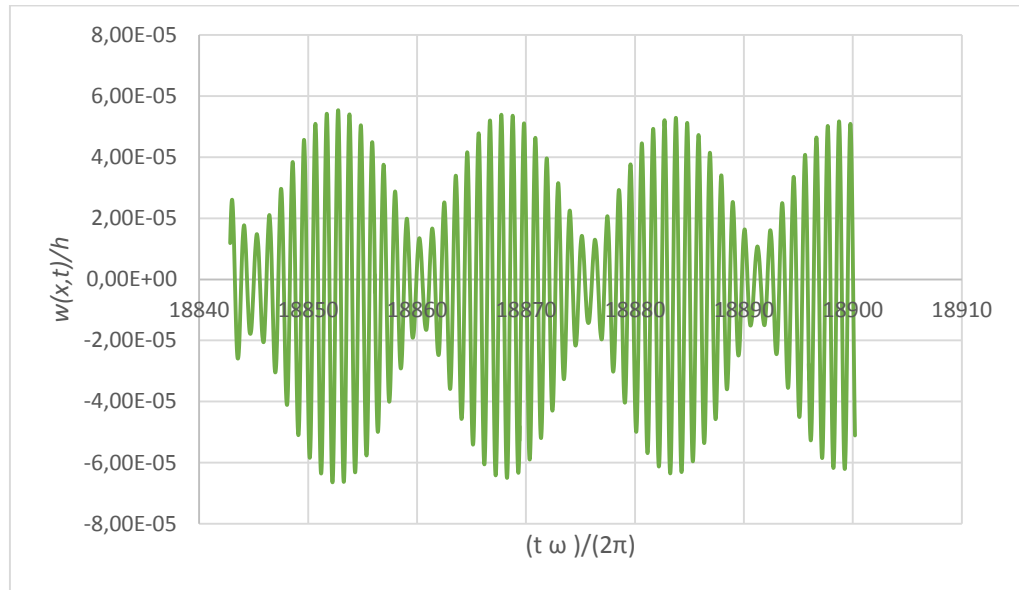


Figura 7. 39 - CE1 Resposta no Tempo 10s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

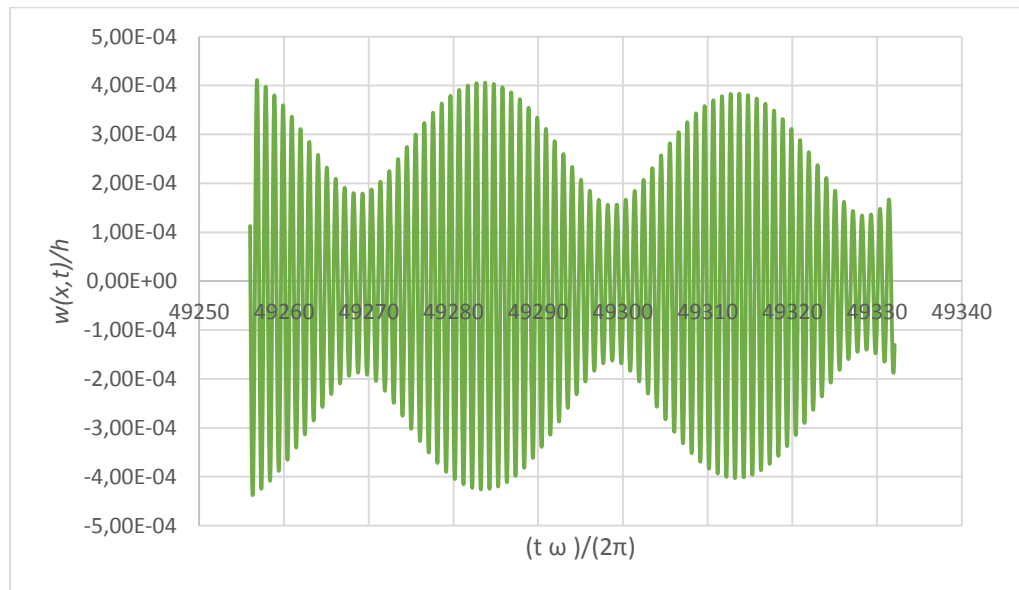


Figura 7. 40 - CE2 Resposta no Tempo 2s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

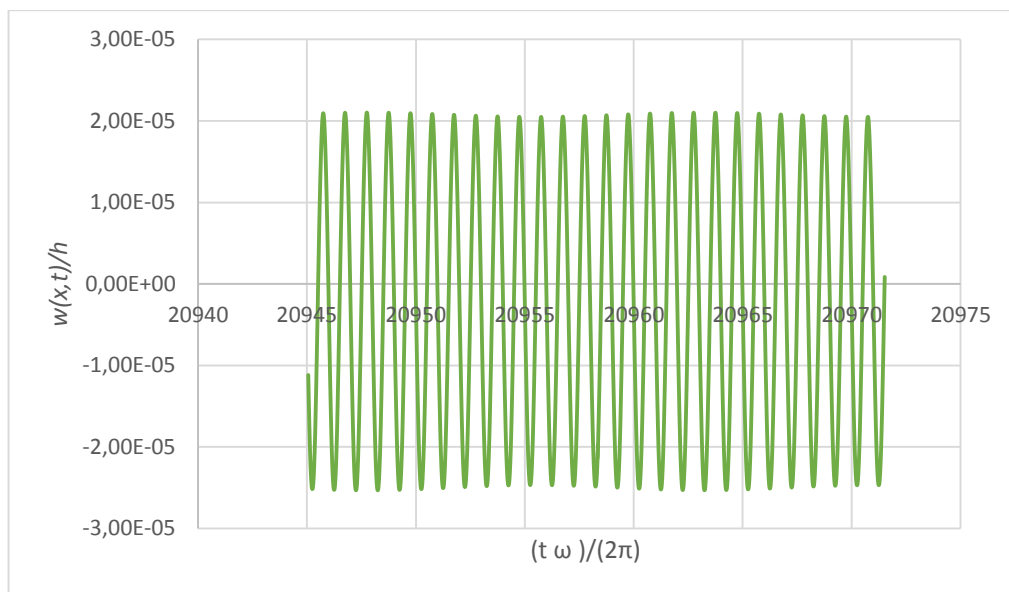


Figura 7. 41 CE1 Resposta no Tempo 15s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

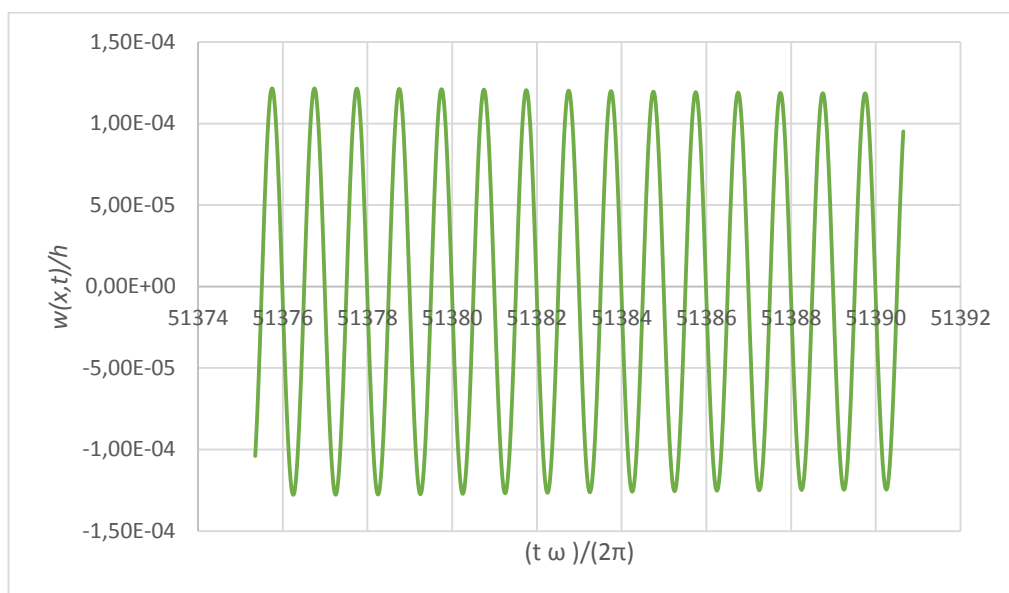


Figura 7. 42 - CE2 Resposta no Tempo 5s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Projecção no plano de fase

Após a abertura da fenda dá-se um aumento das dimensões da órbita, em conformidade com o aumento das amplitudes de deslocamento e velocidade. As soluções obtidas apresentam leves distorções, o que indicará a presença de harmónicos, de intensidade mais baixa do que os esperados para uma solicitação de baixa frequência, e uma evolução em espiral do transiente, desde o aumento inicial de amplitudes até à órbita de dimensões bastante menores, do novo regime transiente. Uma característica interessante é o facto de estas se reproduzirem no tempo à escala umas das outras, como se mostra na figura 7.43.

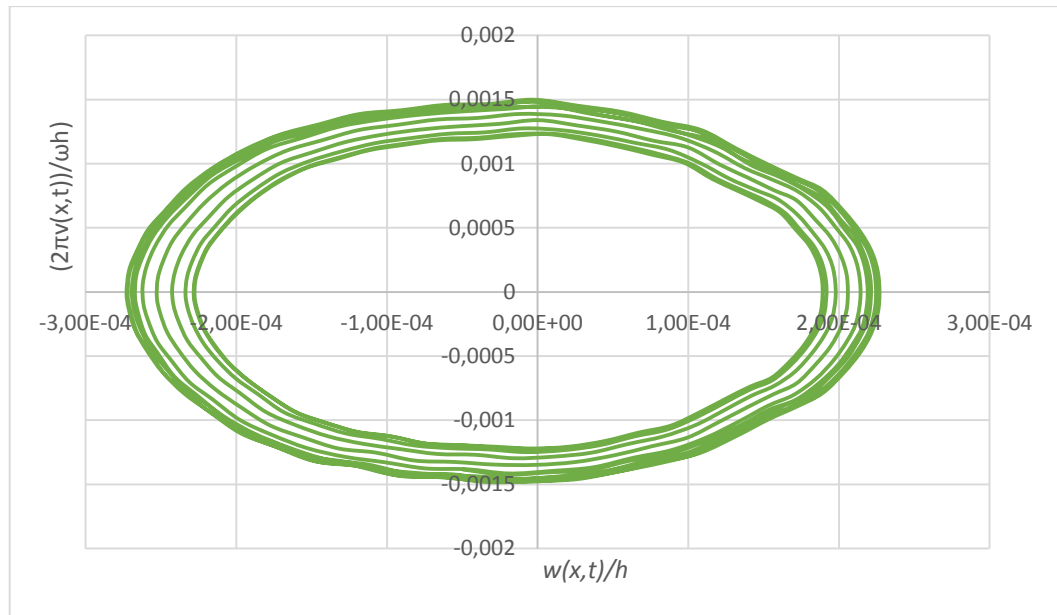


Figura 7. 43 - CE1 Plano de Fase 4,5s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Enquanto dura o período transiente, verifica-se que as órbitas se mantêm abertas. As figuras 7.44 e 7.45 mostram a evolução da projecção no plano de fase desde o equilíbrio dinâmico antes da abertura da fenda até ao novo estado de equilíbrio após a ocorrência de dano.

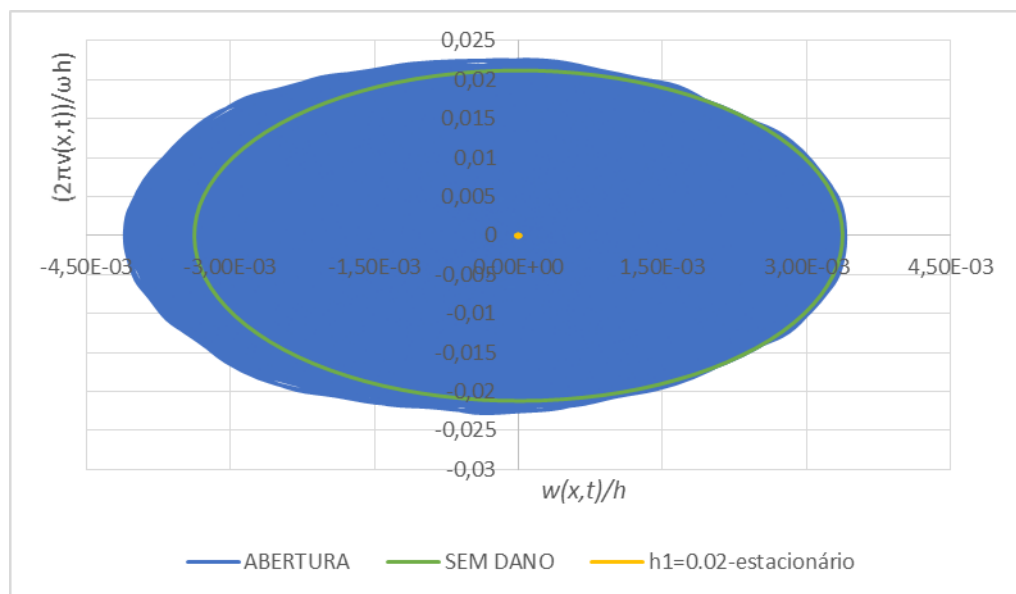


Figura 7. 44 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

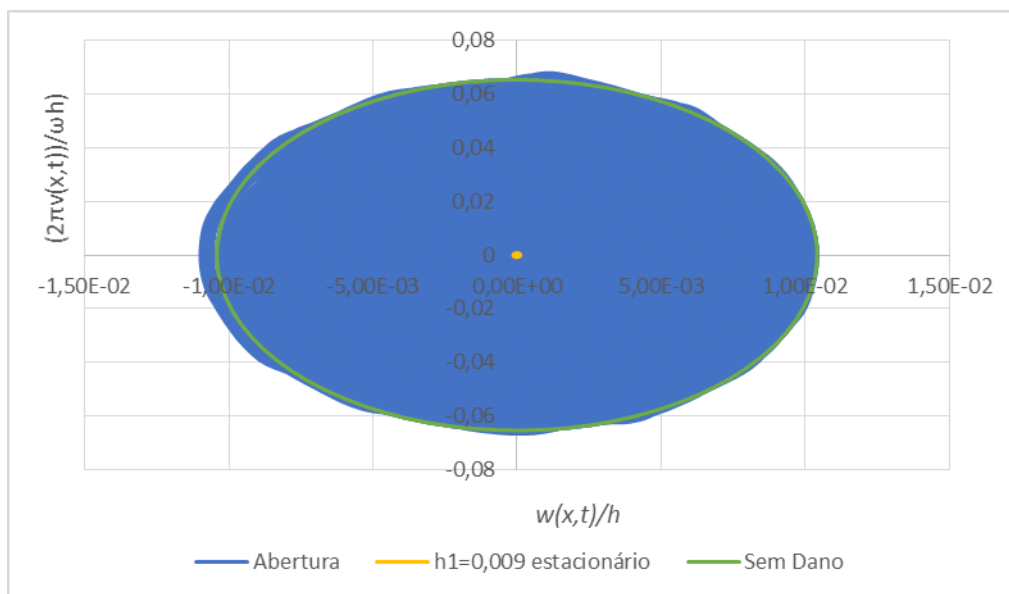


Figura 7. 45 - CE2 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Secção de Poincaré

As figuras 7.46 e 7.47 mostram a evolução no tempo da intersecção da solução dos sistemas com a secção de Poincaré, desde o ponto remoto de regime anterior à abertura da fenda até ao ponto central, para o novo equilíbrio dinâmico. Assim como para uma excitação a um terço da frequência natural da viga intacta, a evolução da solução na secção de Poincaré dá-se segundo uma curva em espiral, desde o exterior para o interior.

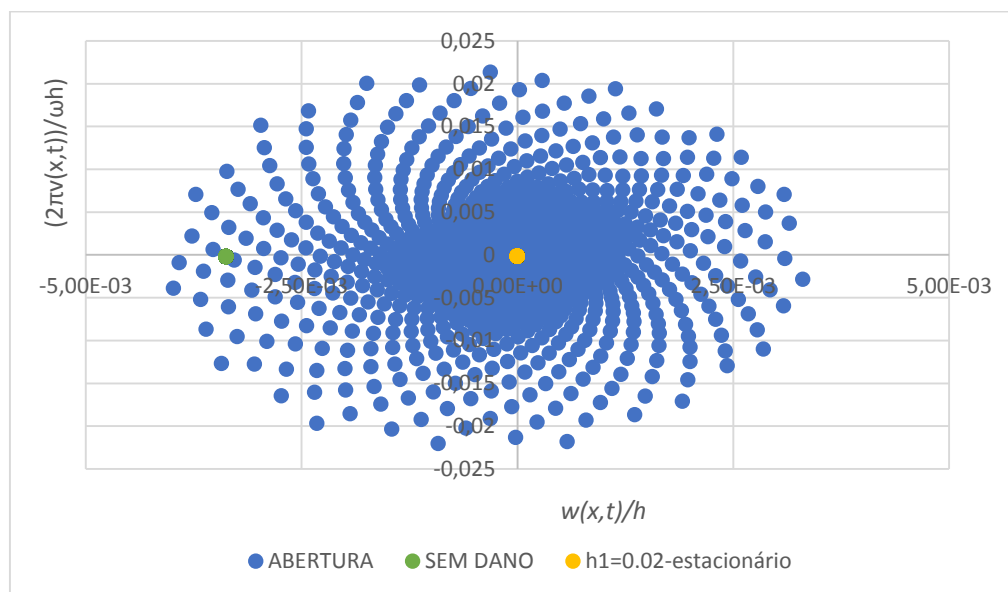


Figura 7. 46 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

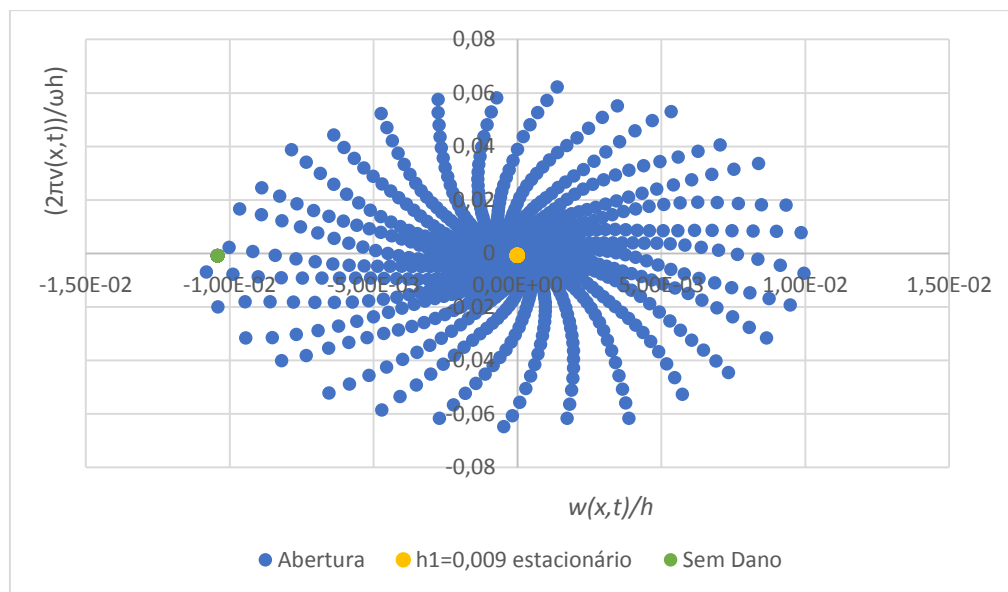


Figura 7. 47 - CE2 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Verifica-se uma correspondência directa entre os pontos, à medida que as suas amplitudes vão diminuindo. Esta organização indica a existência de duas frequências que modelam as respostas dos sistemas, e não fosse a dissipação do transiente as órbitas obtidas seriam circulares e fechadas, típicas de uma solução quási periódica de duas frequências incomensuráveis. A evolução em forma de espiral é visível na figura 7.48.

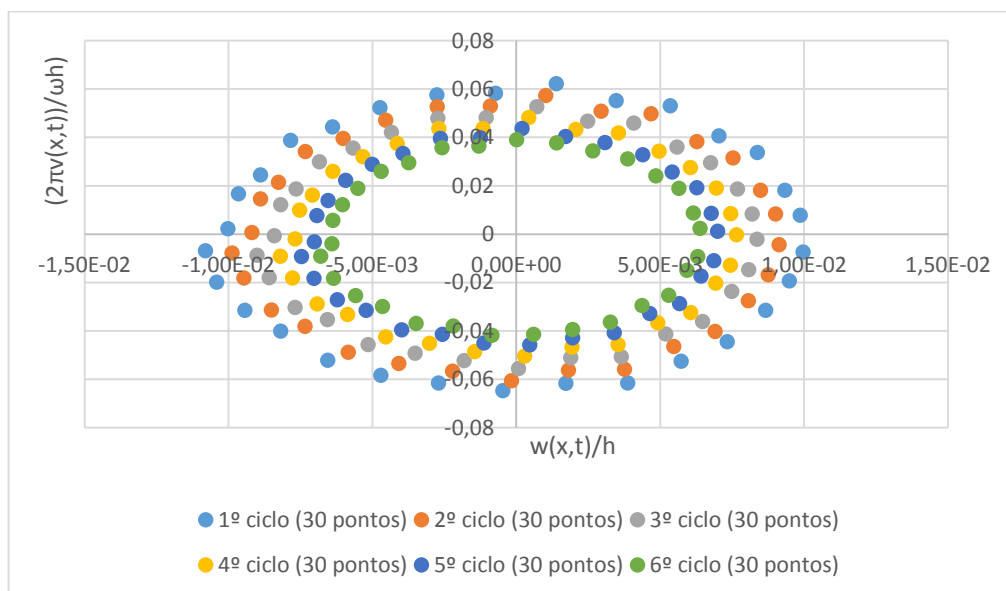


Figura 7. 48 - CE2 Evolução na Secção de Poincaré. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_{1d}$

Resposta no tempo

A figura 7.49 apresenta a resposta no tempo do sistema CE1 nos instantes de tempo próximos da abertura do entalhe, para $t_{dano} = 105s$.

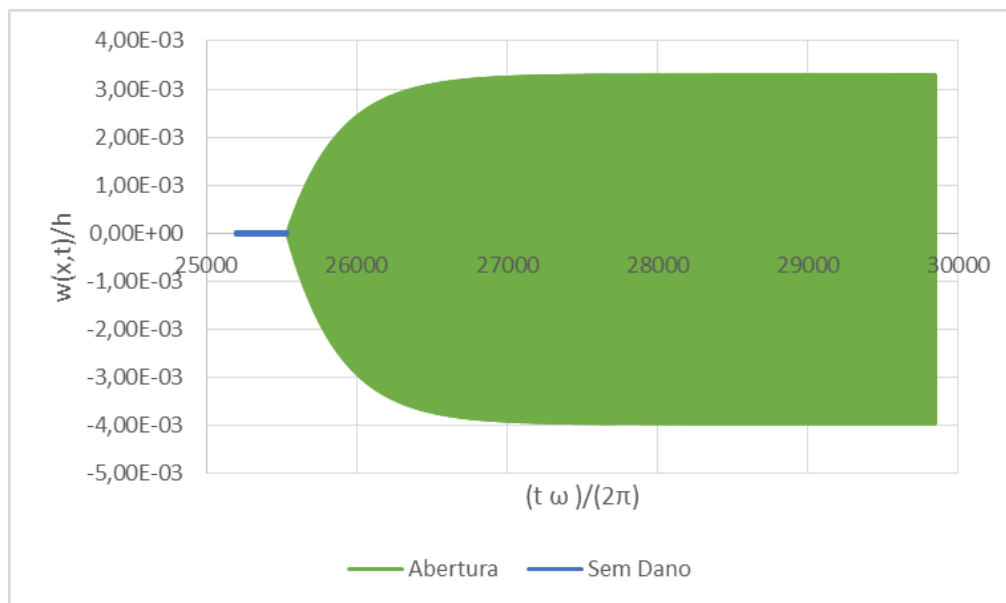


Figura 7. 49 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

Após a abertura da fenda, dá-se um forte aumento da amplitude da resposta da viga, tal como já havia sido demonstrado na análise em regime permanente. À escala da representação gráfica, não são perceptíveis ciclos individuais do movimento e apenas é possível observar a envelope da resposta, que é bastante regular e não mostra qualquer modelação em amplitude.

Observe-se as figuras 7.50 e 7.51. Como se pode concluir, o movimento tem um período bem definido. No entanto, não é perceptível a existência de uma segunda frequência a modelar a resposta transiente. Apenas é patente um crescimento continuado das amplitudes. Ou seja, considerando a assimetria da resposta, verifica-se que o transiente se caracteriza por oscilações não-lineares periódicas, de amplitude variável no tempo. Esta definição vem contrariar aquilo que até agora tem sido concluído, isto é, transientes de oscilações de duas frequências. Se tal conclusão se justifica através da equação (6.3) e do paralelismo feito com sistemas de um grau de liberdade, então as mesmas fontes terão de justificar também esta nova caracterização da solução transiente. E na verdade é bastante simples e intuitivo. Desprezando o amortecimento proporcional, que é bastante baixo, é visível pela equação (6.4) que para uma excitação à frequência natural de vibração que apenas existe uma única frequência a modelar a resposta no tempo. Esta observação permite concluir que quanto mais afastada da frequência natural do sistema for a frequência de excitação mais forte será o efeito da frequência da resposta transitória. Conclui-se também, tendo em conta o observado nas análises anteriores, que quanto

maior a queda da amplitude de resposta, depois da abertura da fenda, maior será a amplitude da resposta transitória.

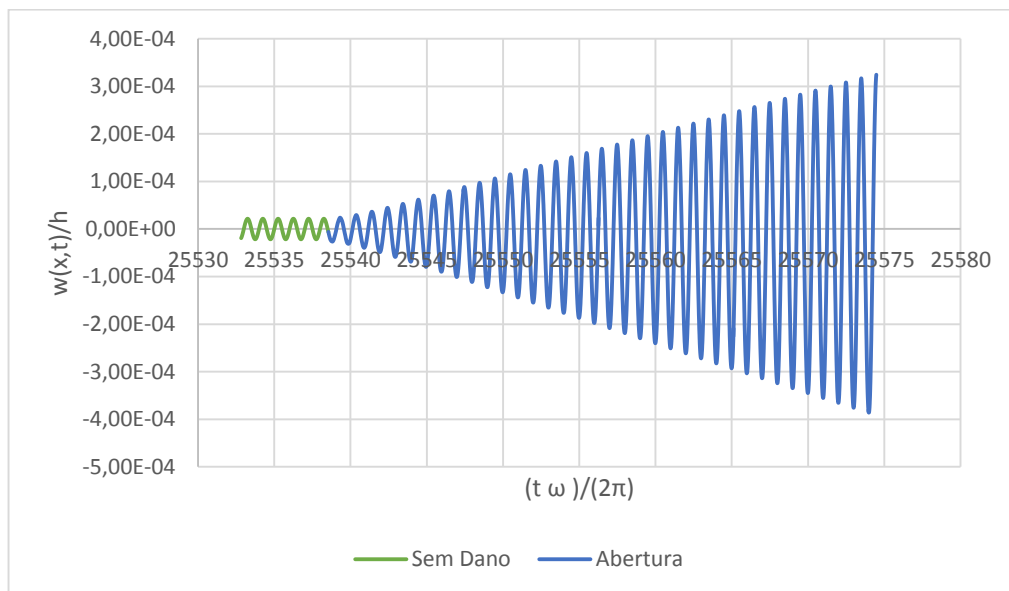


Figura 7. 50 - CE1 Resposta no Tempo no instante de abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

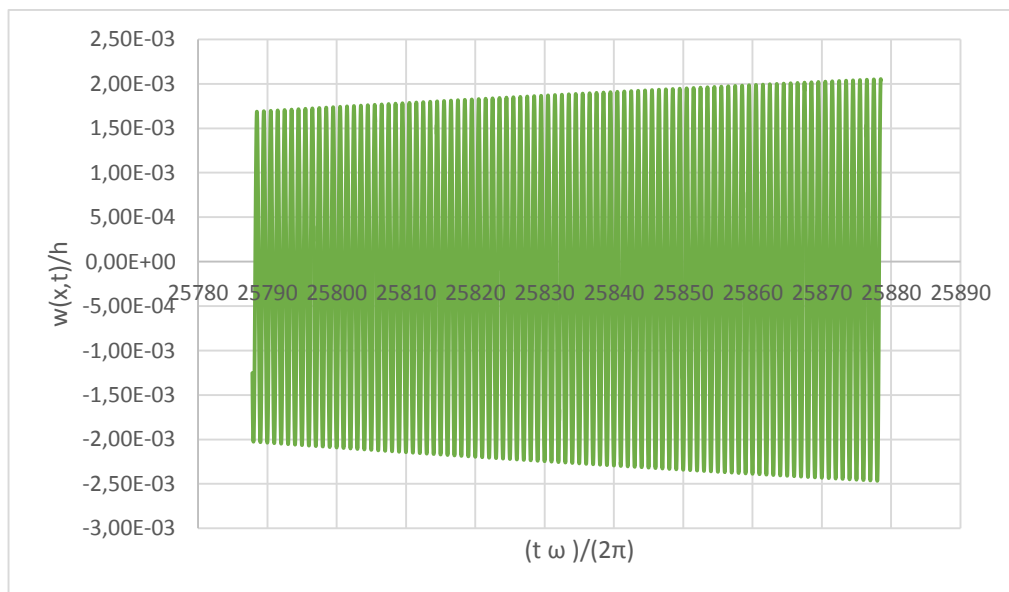


Figura 7. 51 - CE1 Resposta no Tempo 1s após abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

Projecção no plano de fase

Uma vez que neste exemplo a abertura da fenda proporciona um aumento de amplitudes, então a evolução da órbita, no tempo, dar-se-á no sentido inverso. De uma órbita interior para uma exterior. A figura 7.52 mostra os primeiros ciclos do movimento após a abertura da fenda.

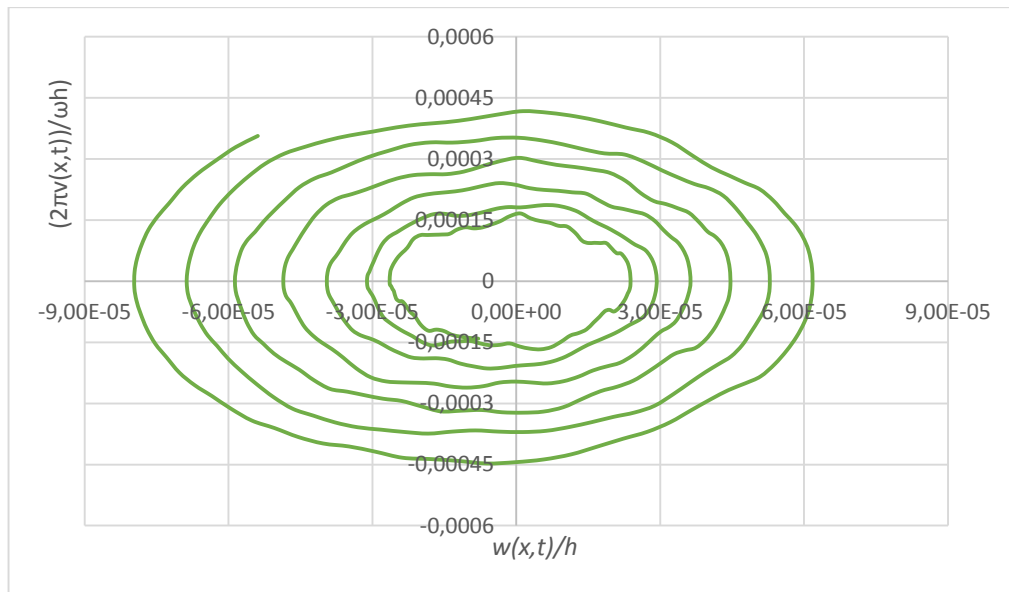


Figura 7. 52 - CE1 Plano de Fase no instante de abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

Verifica-se uma distorção inicial da órbita, forte, que atenua com o passar do tempo. Sabendo que a resposta em regime permanente, na existência de uma fenda bilinear, já apresenta alguns harmónicos da frequência base, então nos instantes subsequentes à abertura da fenda esperam-se pelo menos harmónicos de intensidade mais elevada. Verifica-se que a distorção da órbita rapidamente estabiliza (figuras 7.52 e 7.53) e que esta se vai reproduzindo a escalas sucessivamente maiores, o que está de acordo com a evolução progressiva das amplitudes, vista na representação da resposta no tempo. Na figura 7.49 é notório que a partir de um certo instante o crescimento das amplitudes é extremamente lento. Esta particularidade faz com que, nesse período, o sistema esteja já muito próximo do regime permanente (figura 7.54), com órbitas que aparentam ser fechadas, mas que na realidade ainda se mantêm aberta. A figura 7.55 mostra o progresso da resposta no plano de fase, desde o equilíbrio dinâmico antes da abertura da fenda até ao equilíbrio após a abertura.

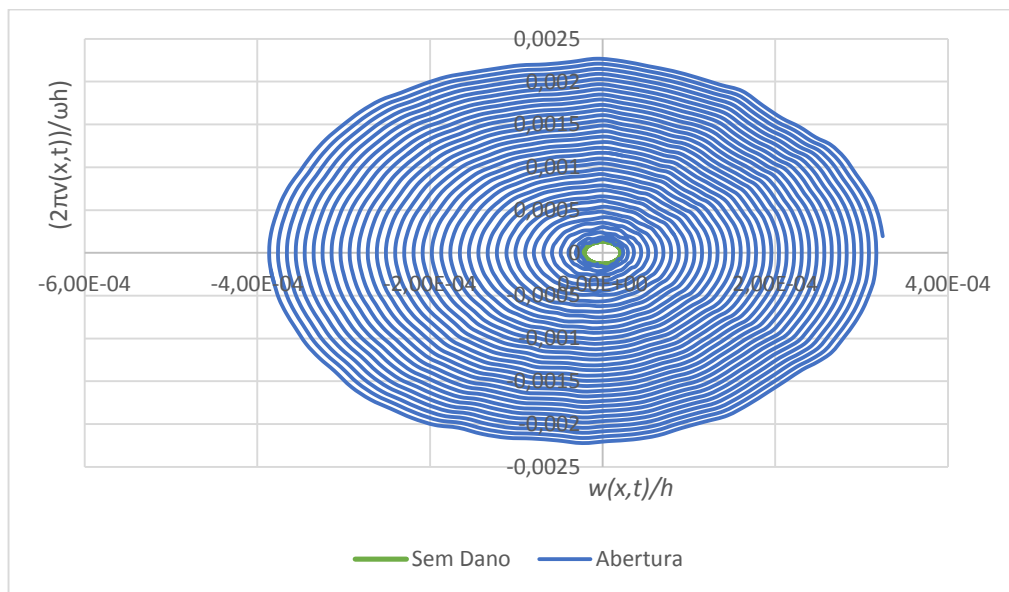


Figura 7. 53 - CE1 Plano de Fase no instante de abertura. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

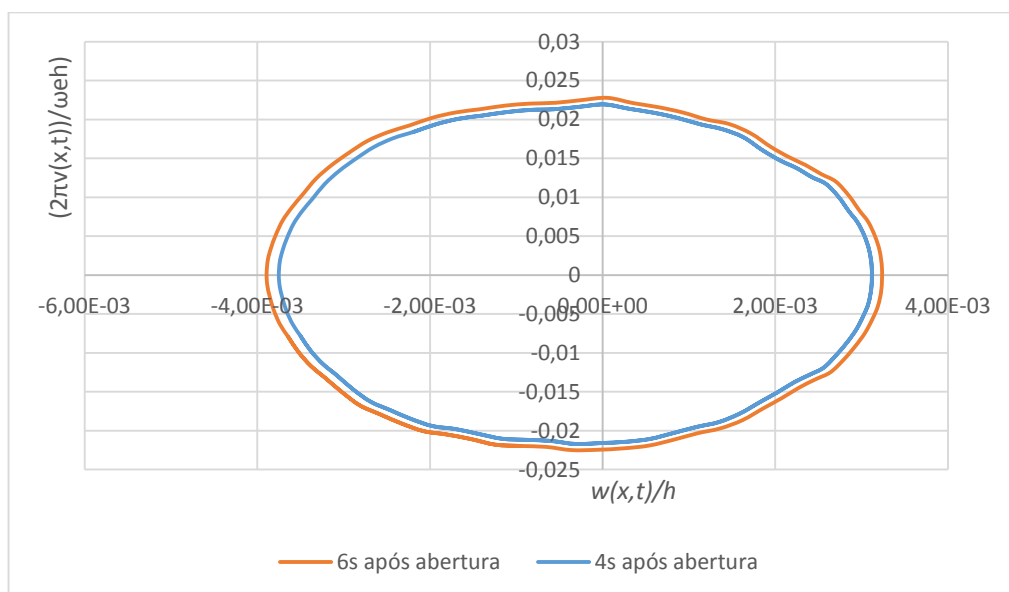


Figura 7. 54 - CE1 Estabilidade no plano de fase, quase regime permanente

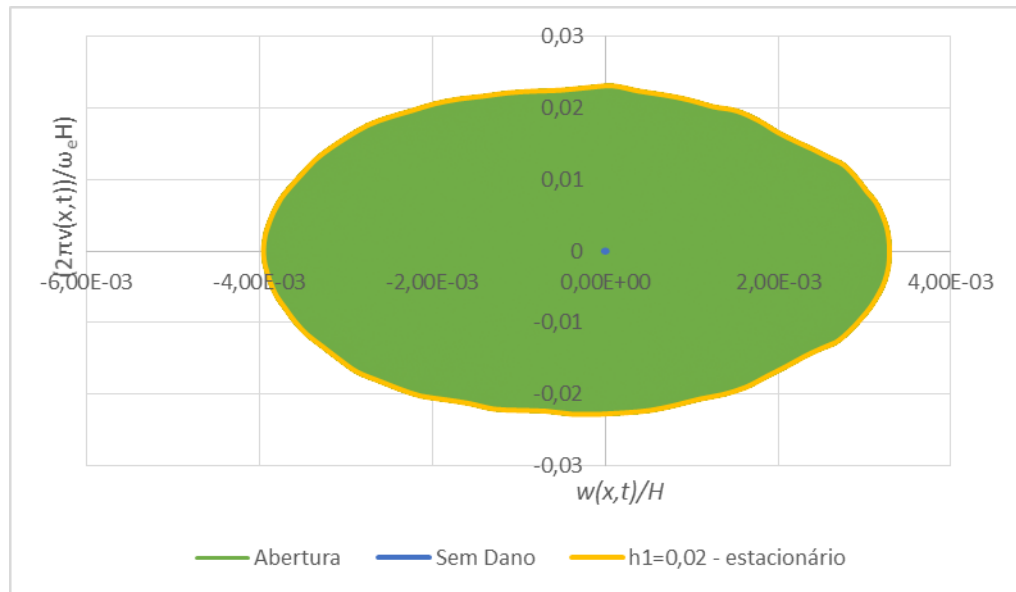


Figura 7. 55 - CE1 Plano de Fase. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

Secção de Poincaré

A figura 7.56 mostra que a intersecção da resposta com a secção de Poincaré, apenas reforça o já concluído. Verifica-se uma tendência para que seja iniciada uma curva em forma de espiral. No entanto, o a taxa de crescimento da resposta quase constante, devido à pequeníssima diferença entre as duas frequências da resposta, leva a uma evolução quase directa entre os pontos referentes aos equilíbrios dinâmicos do sistema, antes e depois de aberto da fenda.

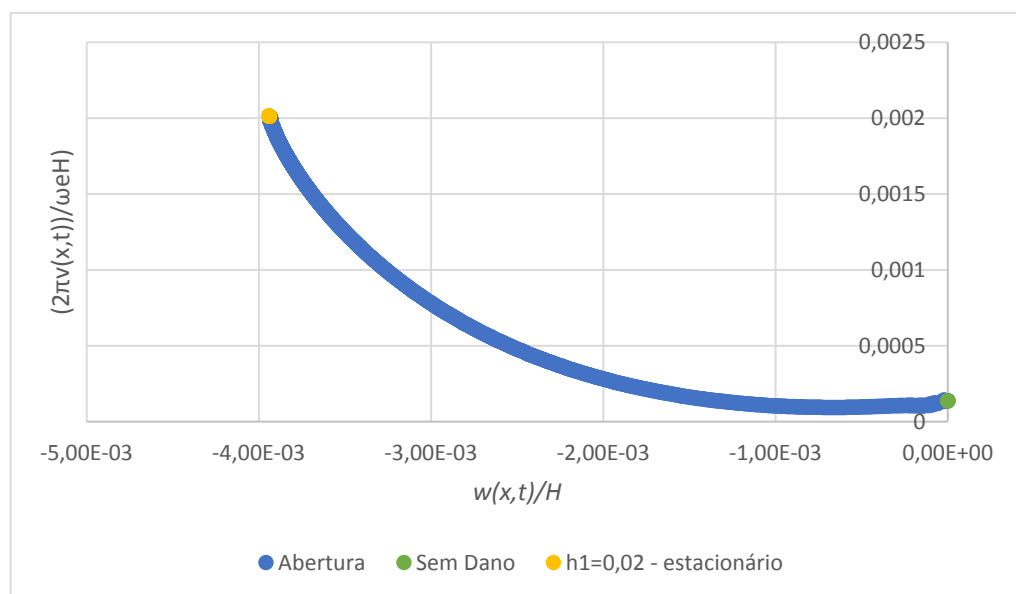


Figura 7. 56 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Transiente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_{1d}$

7.3 RESPOSTA DINÂMICA DE VIGAS EULER-BERNOULLI COM DANO, PARA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

São apresentados e discutidos, neste subcapítulo, os resultados obtidos através do modelo de elementos finitos baseado na primeira aproximação à teoria de Christides e Barr [14] para não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán. O modelo apenas foi aplicado para um caso de estudo, o CE1, para a viga intacta e de maior dano. Os dados do sistema são os mesmos que foram apresentados nas tabelas 7.1-7.5. Apenas são apresentadas respostas em regime permanente, para as frequências de excitação de valor $\omega = \omega_1/3$, $\omega = \omega_1/2$ e $\omega = \omega_1$.

Refira-se que a discussão dos resultados a seguir apresentados não será muito profunda, limitando-se o autor a expor e a descrever os factos observáveis, pois não só não foi possível confirmar experimentalmente os resultados obtidos, como também se trata de uma primeira aproximação à extensão de uma teoria aqui feita directamente por via numérica, com base em suposições e sem um desenvolvimento teórico prévio de uma solução de forma fechada ou exacta. Daí o cuidado para que o modelo seja referido de “primeira aproximação”. Fica assim em aberto, para futuras pesquisas uma melhor avaliação dos resultados e desenvolvimento de uma verdadeira teoria estendida.

Não obstante, antecipando a exposição dos resultados, refira-se que pelo menos no que respeita as formas, ou o traçado, das curvas apresentadas, estas estão formalmente em conformidade com os resultados do subcapítulo anterior.

O modelo está preparado para lidar com não-linearidade geométrica. Por isso já não são impostos limites tão baixos à amplitude da excitação harmónica. Nesse sentido, a amplitude da força, F , será de 1000N com excepção para a excitação à primeira frequência natural da viga intacta, ω_1 , para a qual será de 500N.

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/3$

Resposta no tempo

A figura 7.57 apresenta as respostas no tempo dos sistemas com e sem dano. Na ausência de dano na viga resposta no tempo é sinusoidal. O movimento viga de secção intacta e uniforme é caracterizado como linear e periódico.

A resposta da viga com dano caracteriza-se principalmente pela sua assimetria em relação às amplitudes. Verifica-se que essa assimetria se deve quase na totalidade a um aumento da magnitude máxima no movimento descendente, para o qual se considera aberta a fenda. Conclui-se assim, que o aumento local de flexibilidade, e inversamente a diminuição da rigidez, é o principal responsável por esta particularidade e que quanto maior a profundidade da fenda maior será a assimetria.

A natureza bilinear do sistema implicará, em princípio, a existência de harmónicos da frequência de excitação. No topo da resposta referente à viga com fenda, é visível o que parece ser uma interferência. Verifica-se que essa interferência de repete no tempo de forma periódica. Em todos os casos, com dano ou intactos, as respostas estão em fase no tempo, apresentam uma envelope plana, pelo que se afigura a existência de harmónicos fracos, e um traço uniforme característico de uma solução periódica.

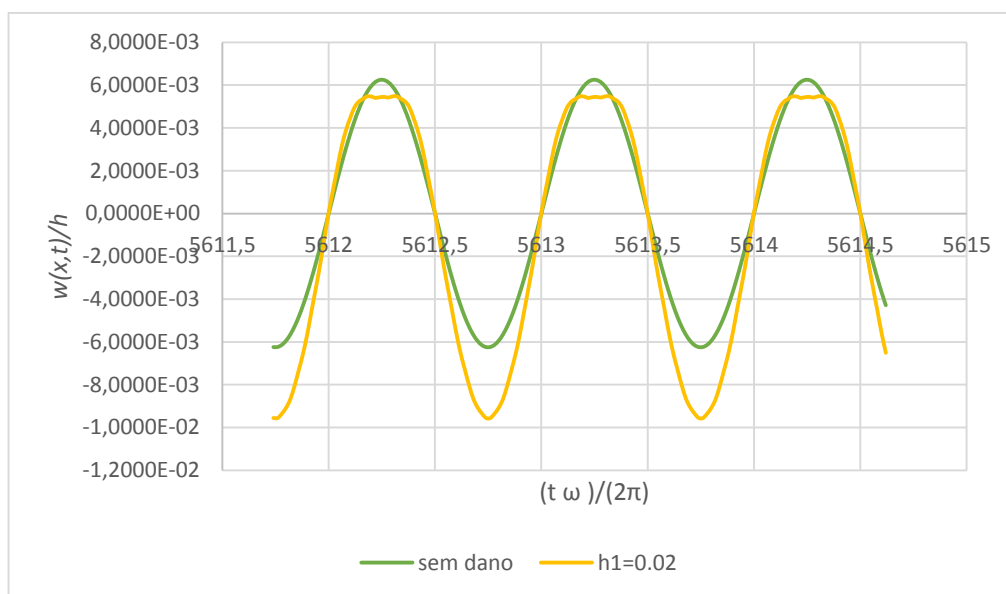


Figura 7. 57 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Com exceção para as amplitudes agora verificadas, as respostas no tempo obtidas são formalmente iguais àsquelas resultantes da teoria linear. Isto acontece porque, para esta excitação a resposta ainda se encontra na verdade em regime linear e o efeito da não-linearidade geométrica introduzidas no modelo é quase desprezável.

Projecção no plano de fase

A figura 7.58 apresenta as projecções no plano de fase para o caso de estudo e coloca em evidência o efeito do dano na caracterização do movimento. As projecções no plano de fase mostram um conjunto de órbitas fechadas, o que confirma a periodicidade de todas as soluções. Observa-se que para a viga com dano, a órbita é assimétrica em relação às amplitudes de deslocamento e distorcida. São esperados por isso harmónicos da frequência base, não só ímpares como também pares, devido á assimetria. Confirma-se enão que o comportamento bilinear, infringido pela abertura e fecho da fenda, resulta num movimento não-linear periódico.

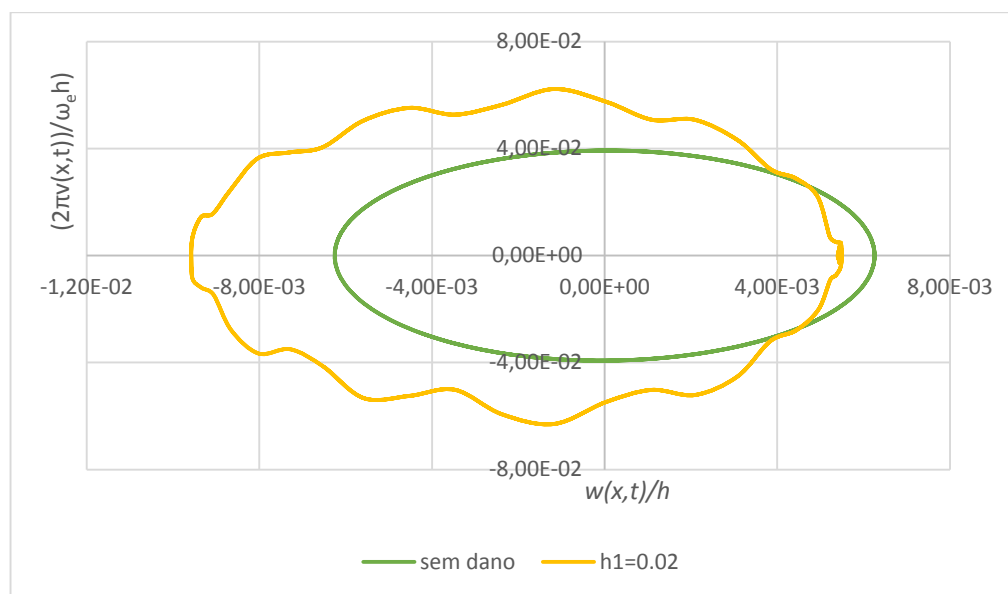


Figura 7. 58 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Verifica-se novamente para o caso CE1, com dano, a existência de alguma interferência, no canto direito da órbita. Esta interferência no plano de fase corresponde à verificada nas figuras 7.59 e 7.60. Um aumento da escala nesta zona da projecção no plano de fase revela, mais uma vez, um número de cruzamentos igual a número de picos da resposta no tempo, como mostram as seguintes figuras.

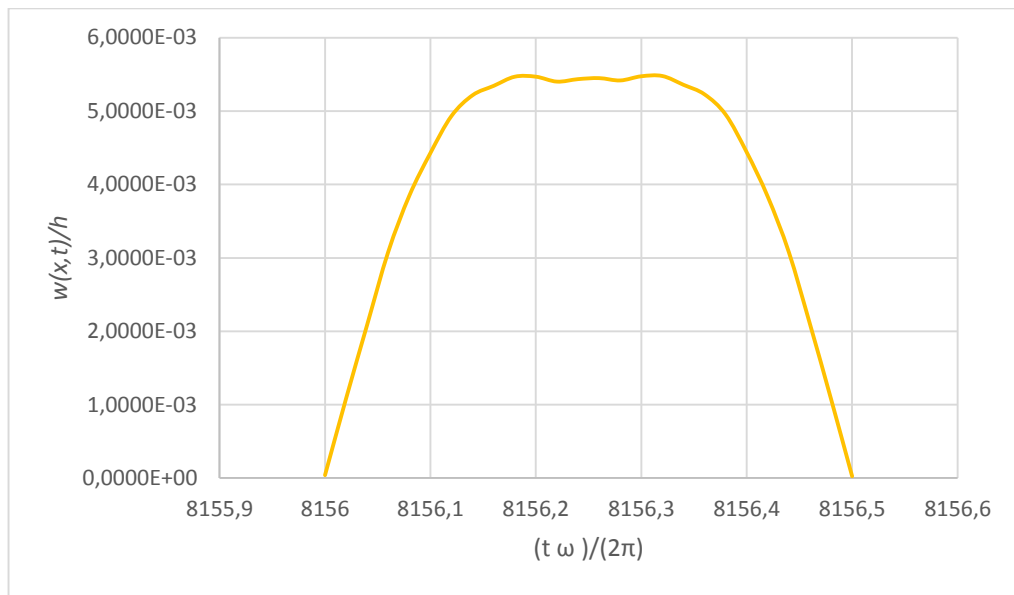


Figura 7. 59 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

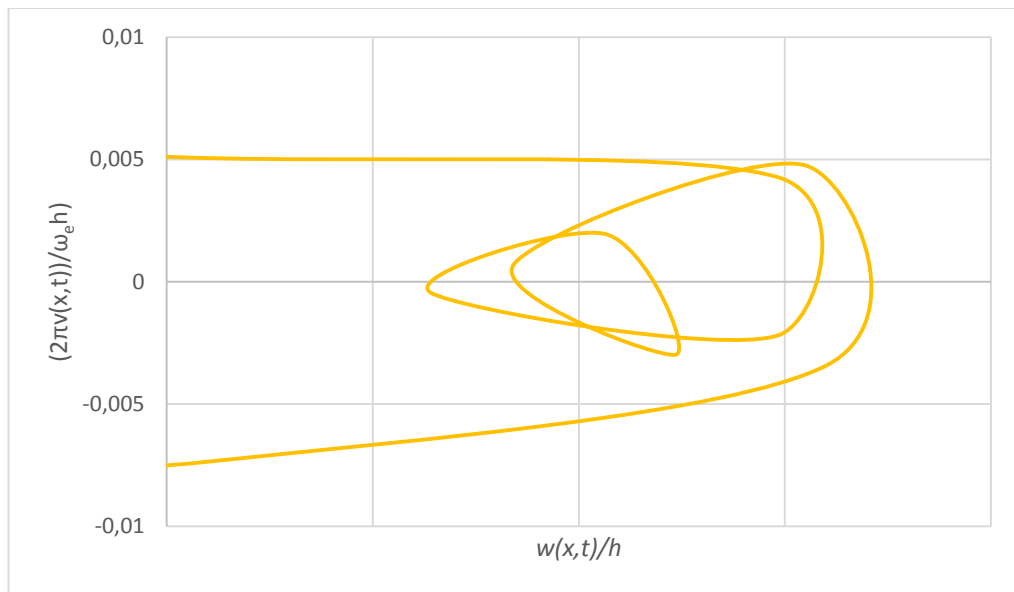


Figura 7. 60 - CE1 Zoom Plano de Fase $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Tal como o que foi verificado no subcapítulo anterior, para a teoria linear, verifica-se o que aparenta ser algum tipo de bifurcação. Verifica-se contudo, que entre os dois modelos, isto é, linear e não-linear, as projecções no plano de fase são formalmente iguais o que dá alguma crédito aos resultados obtidos, em modelos parcialmente diferentes. Crédito esse que se aplicará tanto no sucesso como no erro, dos dois modelos!

Secção de Poincaré

A figura 7.61 apresenta a intersecção na secção de Poincaré das respostas periódicas dos sistemas intacto e com fenda. Ambas as respostas são representadas por um ponto, o que indica a existência de apenas uma frequência fundamental, além disso, este resultado contraria a possibilidade de uma duplicação do período da resposta devido à bifurcação. Verifica-se também que, em relação ao modelo linear, os pontos se encontram em quadrantes diferentes da secção de Poincaré.

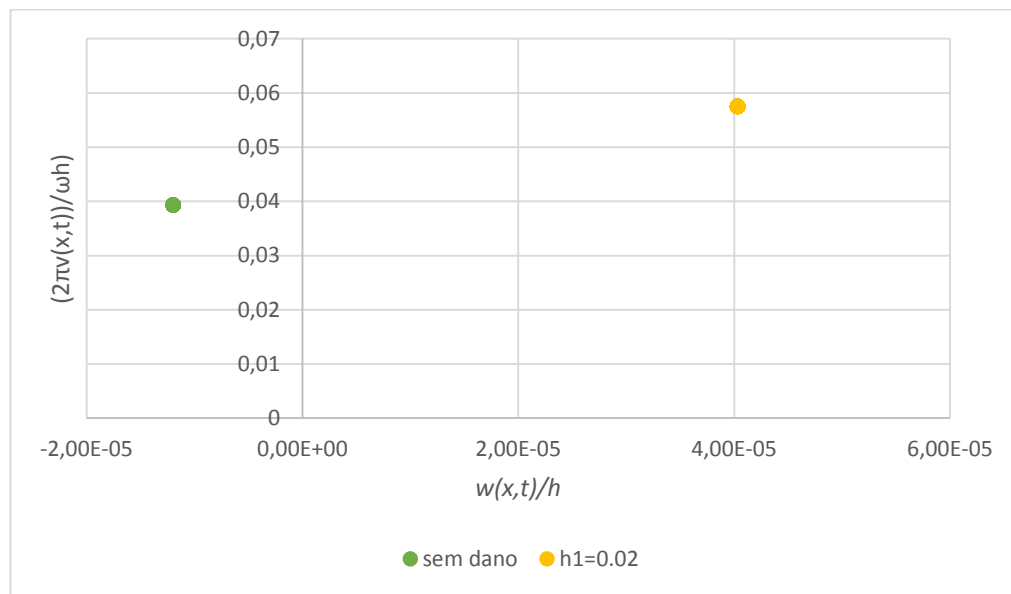


Figura 7. 61 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/3$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1/2$

Resposta no tempo

Na figura 7.62, a representação da resposta no tempo da viga com dano, para uma excitação a metade da primeira frequência natural da viga intacta, mostra um resultado curioso. Verifica-se que para esta frequência de excitação, a assimetria da resposta no tempo do caso CE1 é invertida. Ao contrário do verificado para a frequência $\omega = \omega_1/3$, desta vez será o limite inferior da resposta para a viga intacta que poderá ser considerado como um valor assintótico, no sentido em que, na existência de dano, o máximo atingido pela resposta no movimento descendente tende para esse valor. É visível a existência de alguma interferência na parte inferior da resposta do sistema danificado. Não se sabe, mais uma vez, se esta interferência é fruto de um transiente fraco, ou se se trata de um outro fenómeno.

Não é possível também concluir se a assimetria é também causada por um aumento da magnitude do movimento ascendente da viga ou se apenas pela limitação imposta pela aparente intermitência. A questão é pertinente, pois no caso da excitação à frequência $\omega = \omega_1/3$, quer segundo ao modelo linear quer segundo o não-linear, a assimetria é claramente resultante do aumento de flexibilidade na secção da fenda e, por isso, o aumento da magnitude do movimento dá-se na parte inferior da resposta e o movimento ascendente, onde se considera a viga fechada a partir da curvatura nula, é limitado pela resposta intacta. Será um caso a averiguar cuidadosamente no futuro.

Verificando a amplitude das respostas no tempos, conclui-se que o efeito da não-linearidade geométrica introduzida é muito baixo, quase desprezável. Por isso, uma excitação de igual frequência, segundo o modelo linear, deverá apresentar resultados formalmente semelhantes.

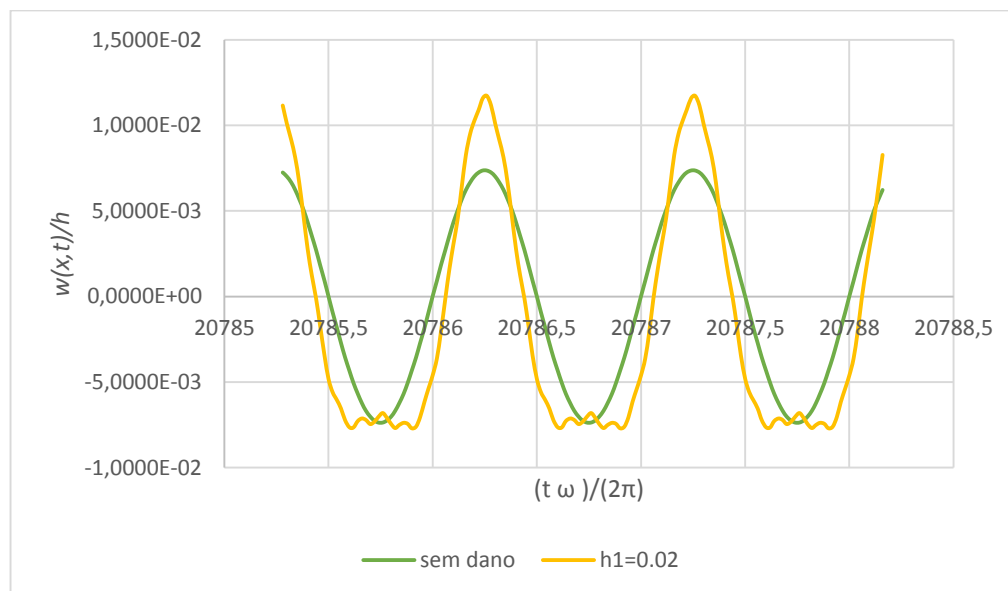


Figura 7. 62 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$

Projecção no plano de fase

A figura 7.63 apresenta as projecções no plano de fase dos sistemas em análise. Para a viga intacta a solução caracteriza-se novamente por uma órbita regular e fechada, típica de um sistema linear periódico de apenas uma frequência base. A órbita é simétrica e não tem sofre qualquer distorção pelo que não são esperados harmónicos. Na existência de dano, observa-se uma órbita distorcida e assimétrica, de acordo com a resposta no tempo. São esperados

harmónicos no espectro de amplitude, com alguma intensidade, devido à forte distorção. Conclui-se que o sistema é não linear periódico.

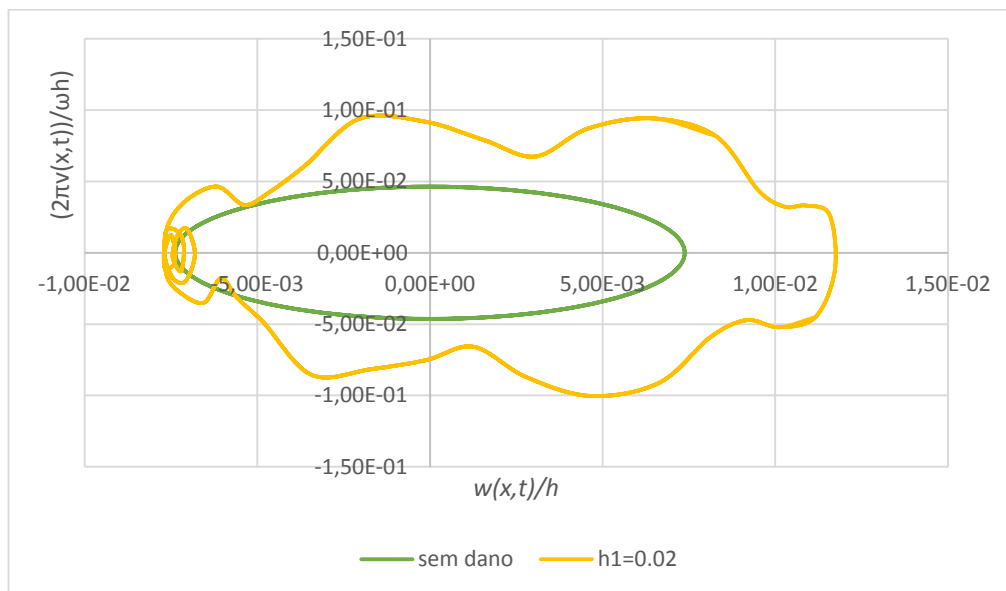


Figura 7. 63 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$

Na extremidade esquerda da órbita são visíveis cruzamentos no plano de fase, resultantes da intermitência observada nas figuras 7.64 e 7.65. Um aumento da escala nesta zona da projecção no plano de fase revela também para este caso um número de cruzamentos igual a número de picos da resposta no tempo, como mostram as seguintes figuras. Refira-se, mais uma vez, que o fenómeno observável aparenta ser algum tipo de bifurcação, embora nada se possa concluir, neste momento, sobre a sua natureza e definição, como já foi explicado em capítulos anteriores. De notar, no entanto, que para esta frequência, e independentemente do comportamento invertido da viga, o efeito da não-linearidade da resposta é mais intenso.

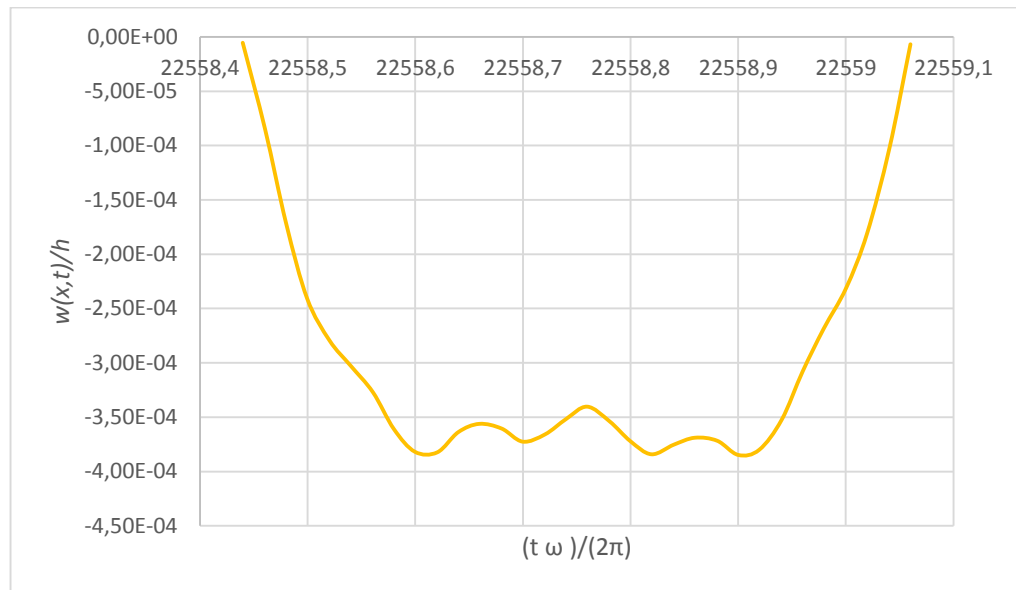


Figura 7. 64 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$

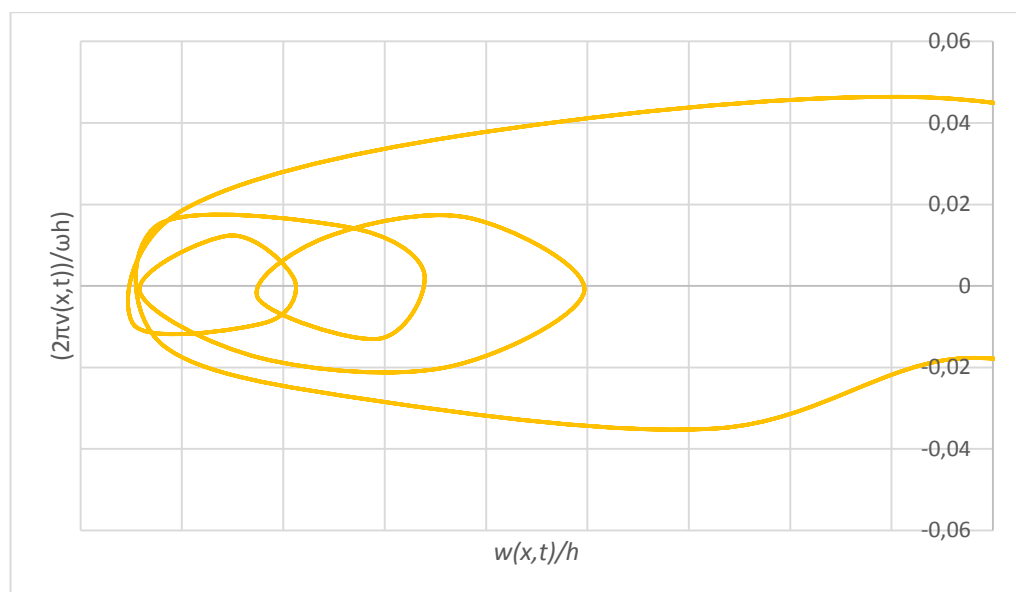


Figura 7. 65 - CE1 Zoom Plano de Fase $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$

Secção de Poincaré

A figura 7.66 apresenta as secções de Poincaré obtidas para os sistemas intacto e com fenda e confirma a periodicidade das respostas, com apenas uma frequência base.

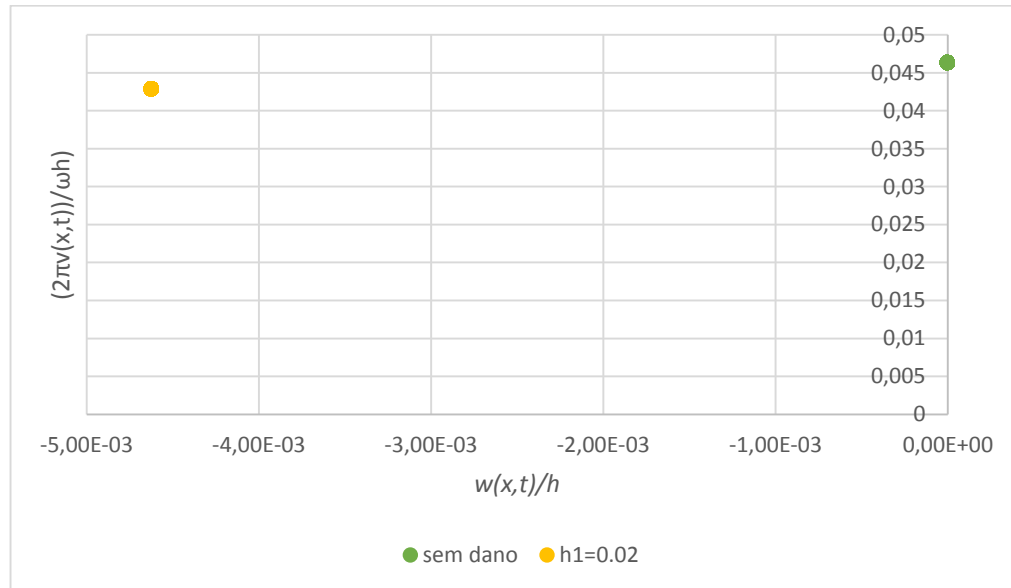


Figura 7. 66 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1/2$

Respostas para uma excitação harmónica de frequência $\omega = \omega_1$

Resposta no tempo

Nesta secção analisa-se a resposta dinâmica a uma excitação harmónica de frequência igual à primeira frequência natural da viga sem dano. É visível a diferença de amplitudes de resposta. No entanto, comparando-se com o observado para o modelo linear, verifica-se que a diferença entre as amplitudes entre a resposta da viga com dano e da viga intacta não é tão significativa. Neste exemplo de viga, já não são desprezáveis os efeitos da não-linearidade geométrica, pois as amplitudes da resposta já ultrapassam os 10% da espessura da viga. Outro ponto que novamente desafia o verificado anteriormente, com o modelo linear, é o desfasamento entre as respostas de π rad, que indica de acordo com a figura 6.14, para o espectro do ângulo de fase, que também a frequência natural dos sistemas é influenciada pela não-linearidade geométrica. O ângulo de fase existente indica que a primeira frequência natural não-linear da viga intacta, ω_{1nl} , será inferior à linear, ω_1 . Este facto explica também a diferença reduzida entre as amplitudes de resposta.

A figura 7.67 apresenta as respostas no tempo, para a viga intacta e com fenda.

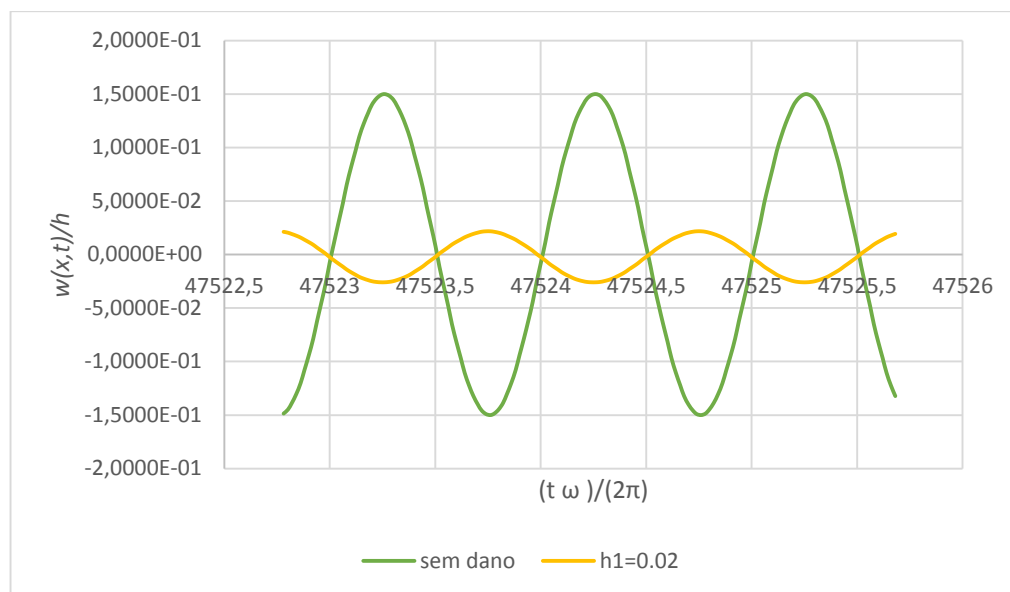


Figura 7. 67 - CE1 Resposta no Tempo. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Verifica-se também uma ligeira assimetria da resposta no tempo, do sistema danificado, como mostra a figura 7.68. Não são verificadas quaisquer intermitências na resposta e a assimetria ocorre durante o movimento descendente da viga.

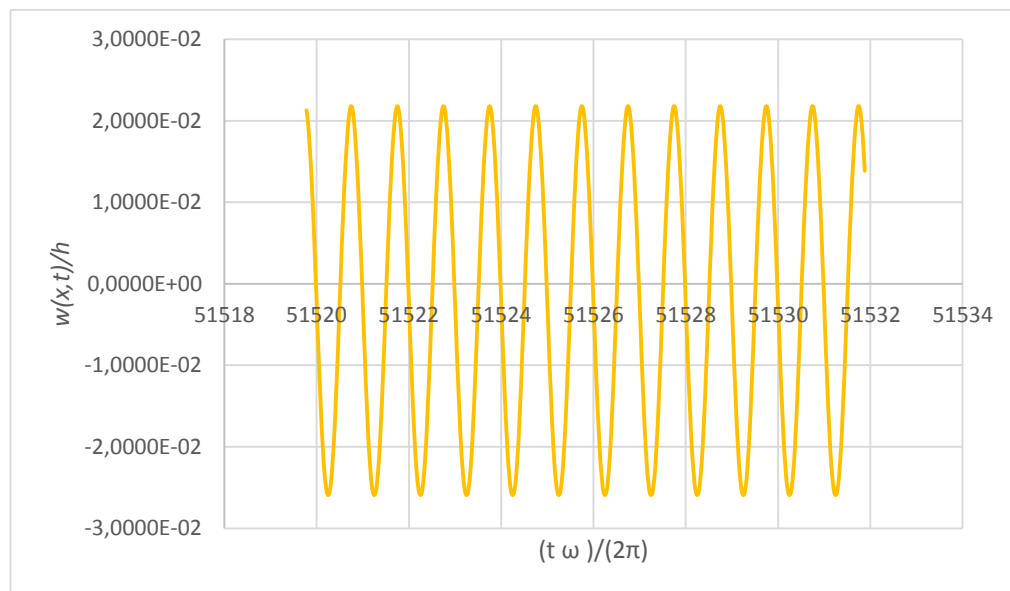


Figura 7. 68 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Projecção no plano de fase

Tal como na representação da resposta no tempo, também as diferenças entre dimensões das projecções no plano de fase são de diferente ordem de grandeza, na figura 7.69. Para a viga intacta, em ambos os casos, a projecção no plano de fase caracteriza-se novamente por uma órbita regular e fechada, típica de um sistema linear periódico de apenas uma frequência base. A órbita é simétrica e não tem sofrer qualquer distorção pelo que não esperados harmónicos.

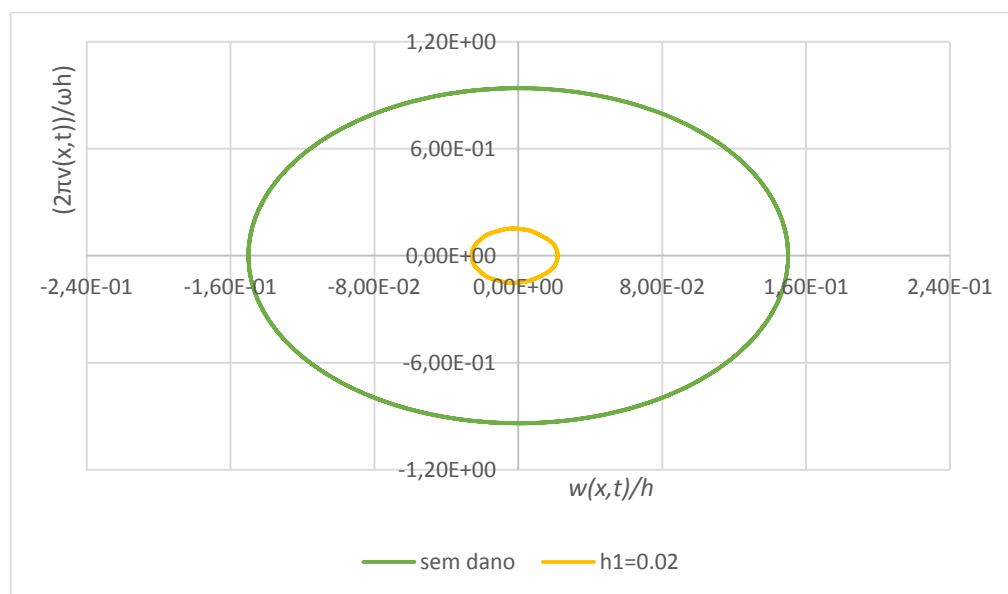


Figura 7. 69 - CE1 Plano de Fase. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

A figura 7.70 mostra uma ampliação da projecção no plano de fase para a viga com dano. A solução caracteriza-se por uma órbita fechada, muito próxima de uma elipse e apenas ligeiramente distorcida e assimétrica em relação às amplitudes de deslocamento, ao contrário do verificado nos capítulos anteriores, deixando assim antever a existência de harmónicos de baixa intensidade, tanto impares como pares. Por a solução no plano de fase ser uma órbita fechada de apenas um ciclo, então o sistema é claramente periódico e de apenas uma frequência base. Espera-se portanto um sistema não-linear periódico, próximo de um sistema linear.

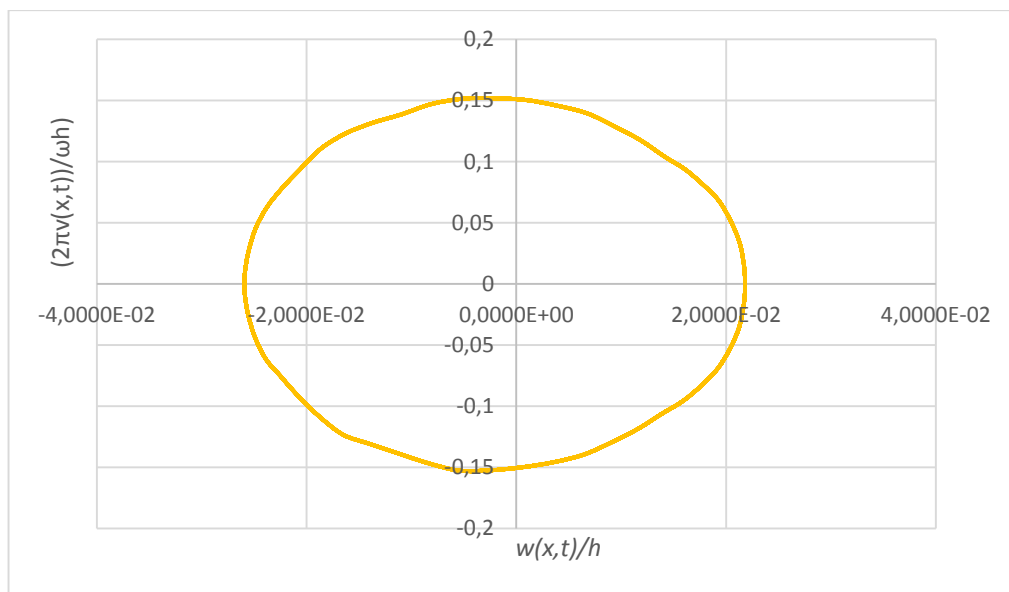


Figura 7. 70 - CE1 Zoom Resposta no Tempo $h_1=0,02m$. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Secção de Poincaré

A figura 7.71 apresenta as secções de Poincaré obtidas para os sistemas intacto e com fenda. Em todos os casos, a intersecção na secção de Poincaré corresponde a um ponto discreto, o que indica a existência de uma solução periódica de apenas uma frequência base.

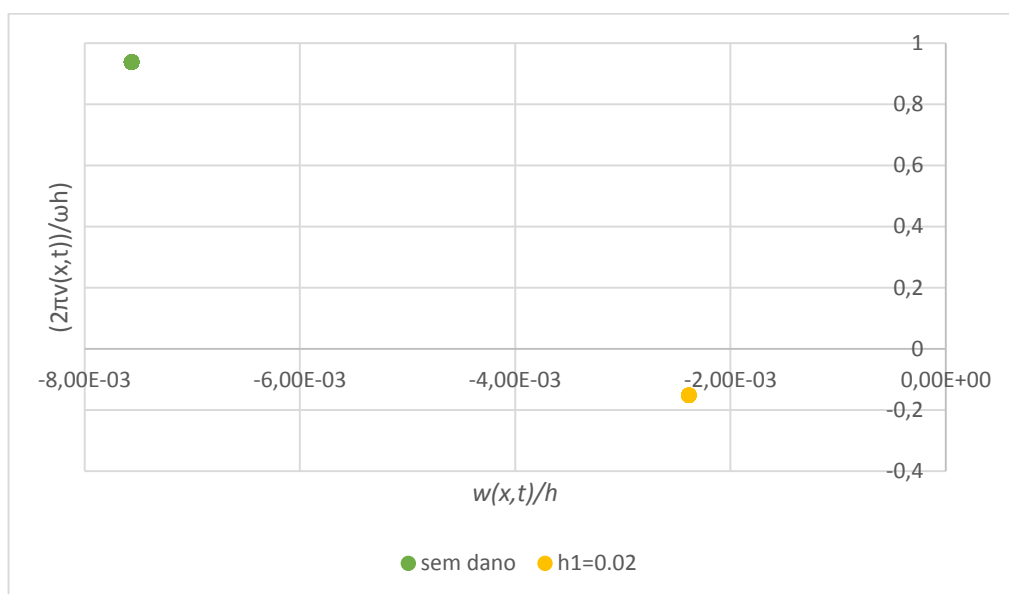


Figura 7. 71 - CE1 Secção de Poincaré. Regime Permanente. Viga duplamente encastrada. $\omega = \omega_1$

Espectro de amplitudes

Ao contrário da organização até agora vigente, optou-se desta vez por apresentar os espectros de todos os casos, no mesmo capítulo, uma vez que são bastante semelhantes aos já observados. Apenas são apresentados os espectros referentes a vigas com dano, sabendo que, na ausência deste, apenas se verifica um pico à frequência base. Verifica-se a existência de harmónicos em todos os casos, principalmente para a excitação à frequência $\omega = \omega_1/2$. No último espectro, confirma-se que para uma excitação à primeira frequência natural linear, próxima da não-linear, a resposta é quase linear periódica. Observe-se a figura 7.72.

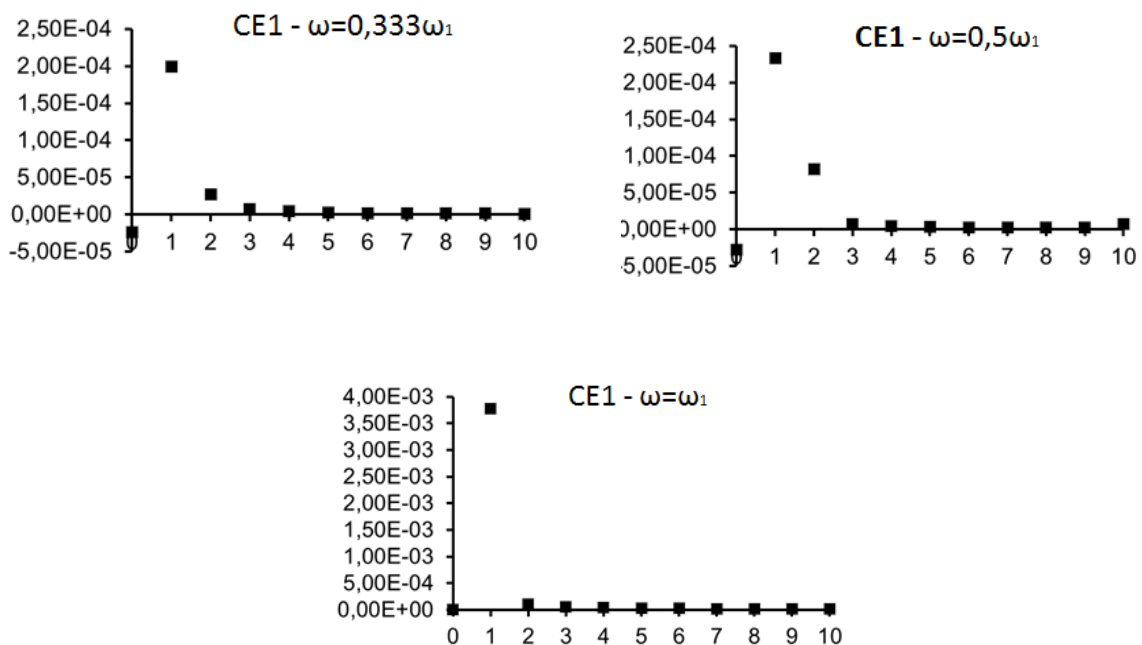


Figura 7. 72 - Espectros de amplitudes. Regime Permanente. $\omega = \omega_1$

7.4 FECHO DO CAPÍTULO

Neste capítulo, foram apresentados os resultados para a excitação dos casos CE1 e CE2 a diferentes frequências e para as condições de fronteira de duplo encastramento. A solução dinâmica dos sistemas foi apresentada sob a forma de representações gráficas da resposta no tempo, planos de fase, secções de Poincaré e espectros de amplitudes. A presença de uma fenda bilinear introduz não-linearidades interessantes nas respostas dos sistemas. Para todas as frequências de excitação, as respostas no tempo são assimétricas, de maior amplitude no movimento descendente da viga, para o qual se considera que a fenda está aberta. Verifica-se que

uma maior profundidade de entalhe origina assimetrias mais acentuadas. As órbitas no plano de fase são, regra geral, assimétricas, distorcidas e de apenas uma volta, o que indica a presença de harmónicos e de apenas um período de resposta. Também na secção de Poincaré se observa um ponto, para cada caso, o que confirma a periodicidade unitária. Os espectros de amplitudes mostram a presença de harmónicos em todos os casos. Portanto, conclui-se que as respostas, na presença de uma fenda bilinear, são não-lineares periódicas. A comparação entre os resultados obtidos para as diferentes excitações, mostra que para baixas frequências a resposta dinâmica é modelada pela geometria da viga e da fenda. Verifica-se que para as mesmas dimensões de viga, fendas de maior profundidade dão origem a amplitudes assimétricas mais elevadas e a harmónicos mais intensos. Verifica-se também que quanto maior o comprimento da viga, l , maior a sensibilidade desta ao aumento da profundidade da fenda. Por outro lado para excitações de frequência elevada, onde se incluem ω_1 e ω_b , a resposta é modelada principalmente pelas características materiais do sistema. A existência ou não de ressonância irá implicar amplitudes de resposta de ordens de grandeza diferentes. À frequência ω_1 , as amplitudes são muito mais elevadas para a viga intacta e para uma excitação a ω_b , o oposto. Para ambas as frequências verifica-se que as órbitas no plano de fase são menos distorcidas e as harmónicas de bastante menor intensidade. Em ambos os casos o desfasamento entre a resposta intacta e com dano é de aproximadamente $\pi/2$ rad, o que confirma que, para $\beta \geq 1$, o efeito da fenda é serenado. De referir que para uma excitação a $\omega = \omega_1/3$, para o caso CE1, se observam na resposta no tempo algumas interferências na parte superior, que correspondem a pequenos “*loops*” no plano de fase. O fenómeno parece indicar algum tipo de bifurcação, principalmente uma duplicação de período, no entanto tal não é demonstrado na secção de Poincaré, que apenas apresenta um ponto. Talvez um posicionamento da secção noutra localização demonstrasse algo mais, mas neste momento nada mais se pode concluir. A resposta transiente é, tal como no capítulo anterior, caracterizada por duas frequências e também elas se poderão aproximar à definição de oscilações quase periódicas temporárias, de duas frequências [20]. Os transientes são bastantes mais longos e as amplitudes mais pronunciadas, em relação ao verificado com um entalhe. A evolução das órbitas no plano de fase é bastante mais “acidentada”, fruto das fortes distorções das órbitas. De grande interesse, na análise destes transientes, são também as secções de Poincaré que exibem uma evolução em espiral, na forma de “galáxia”. A evolução dos pontos dá-se desde o ponto mais exterior, referente ao equilíbrio antes da abertura da fenda, até ao ponto central, do novo equilíbrio dinâmico após abertura. Como ficou demonstrado em representações próprias, verifica-se que essa evolução é cíclica e nela verifica-se a correspondência entre os pontos de cada ciclo. Mais uma vez, se conclui que

se a resposta transitória não se dissipasse, então estas órbitas em espiral dariam origem a curvas fechadas, características de respostas quase periódicas de duas frequências. No fim do capítulo foram ainda apresentados resultados para o modelo não-linear. Os resultados obtidos são formalmente iguais aos verificados com o modelo linear. No entanto, é preciso ressaltar que, à exceção do verificado para $\omega = \omega_1$, os movimentos não apresentaram amplitudes suficientemente altas para entrarem em regime não-linear, o que justifica a similitude dos contornos das respostas.

CAPÍTULO 8

REVISÃO E CONCLUSÕES

8.1 REVISÃO

Na dissertação que agora se dá por concluída, foi estudada a dinâmica de vigas com dano, pela aplicação do método dos elementos finitos (MEF) tipo-p. Foram apresentados três modelos distintos de elementos finitos, com objectivos distintos e a solução das equações diferenciais do movimento foi obtida pela aplicação do método de Newmark.

Iniciou-se o trabalho por uma acessível abordagem à formulação matemática do MEF, com destaque para a sua versão-p, através do *método de Galerkin*. Foram também discutidas as convergências do método tradicional (tipo-h) e do método tipo-p. Mostra-se que, para uma malha quase uniforme, a taxa de convergência no MEF tipo-p nunca será inferior à do tipo-h. Refere-se contudo que a optimização da malha promove uma maior convergência para o método tipo-h, no caso de uma parametrização fixa, no outro. No entanto, para o método tipo-p também é possível fazer ajustes da malha e, nessa perspectiva, ganhar vantagem novamente. O ideal contudo será a combinação das propriedades de ambos os métodos, ou seja, aumento do número de graus de liberdade pelo refinamento da malha nos locais críticos e pela adição de polinómios de graus sucessivamente superiores, até que seja encontrado um equilíbrio entre convergência de resultados e custo computacional. É também referido que uma das limitações do MEF tipo-p é a baixa sensibilidade a singularidades no interior do domínio. Para minimizar este problema, nos modelos neste trabalho desenvolvidos, foram introduzidos um conjunto de funções de forma cúbicas dependentes da localização do dano [42].

O primeiro modelo de elementos finitos apresentado baseia-se na teoria de vigas de Timoshenko. Dessa forma, o autor precede a sua formulação com uma introdução ao problema da derivação das frequências naturais pela teoria referida. Foi demonstrada a existência de um valor crítico de frequência, ω_c , pelo qual são definidos dois espectros de frequências, um no domínio real e outro no domínio complexo. A validade do segundo espectro é um assunto amplamente discutido e para o qual ainda não foram respondidas muitas questões. No entanto, uma grande classe de investigadores demonstra que este deve ser descartado e que se tratará de uma consequência indesejada da teoria de Timoshenko. O assunto é aqui apresentado segundo

o trabalho de N.G. Stephen [40] e N.G. Stephen et al. [41], onde concluem que para vigas apoiadas, e condições de fronteira daí derivadas, o primeiro espectro prevê com grande exactidão as frequências naturais, mesmo para valores acima do valor crítico, pois o segundo espectro nunca entra no domínio real. Contrariamente, defendem que nas restantes condições, acima do valor crítico, o segundo espectro passa a ser definido por funções trigonométricas (reais) e as suas ondas sobrepõem-se às do primeiro, causando erros grosseiros. De seguida é formulado o modelo de elementos finitos, para uma viga Timoshenko com dano. Nele o dano é considerado um entalhe de duas dimensões (largura e profundidade). Consideram-se vigas de secção rectangular uniforme, com excepção para a zona do entalhe, isotrópicas e homogéneas. É considerado também amortecimento proporcional de rigidez. A equação do movimento foi derivada por aplicação do *princípio dos trabalhos virtuais*. O objectivo deste modelo é continuar em parte o trabalho desenvolvido por Stojanovic et al. [42], no sentido em que se pretende verificar se o entalhe realmente fecha ou se fica sempre aberto como considerado em [42]. Dessa forma o modelo é agora capaz de determinar a posição de cada extremidade do entalhe e avaliar se estas se tocam ou sobrepõem. Foram também formuladas um conjunto de funções hermiteanas, com base na teoria de Timoshenko, pelo processo de Bazoune et al. [8] e estudada a convergência de resultados, pela sua aplicação ao modelo anterior, no cálculo das cinco primeiras frequências naturais.

O segundo modelo introduzido baseia-se na *teoria de vigas Euler-Bernoulli com fendas* de Christides e Barr [14]. O autor iniciou este capítulo com uma introdução ao cálculo das frequências naturais de vibração pela teoria de Euler-Bernoulli. O problema é bastante menos complexo e as soluções encontradas são aceites de forma global. Por desprezar os efeitos da inércia da secção recta e do corte, esta teoria tende a sobrestimar os valores das frequências e não é adequada para previsão de altas frequências. O modelo de elementos finitos foi derivado a partir da equação diferencial do movimento derivada por Christides e Barr, através aplicação do *método de Galerkin*. Foi considerado amortecimento proporcional e material elástico e isotrópico. O objectivo deste modelo é estudar a resposta não-lineares resultantes de fendas bilineares. Desta forma, considera-se que a fenda abre quando a curvatura da viga é positiva e que fecha quando é negativa.

O terceiro modelo de elementos finitos pretende ser não mais do que uma primeira aproximação à extensão da teoria de Christides e Barr, para não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán. Foi considerado que a mesma função modeladora de rigidez do modelo linear é aplicada também neste caso. A equação do movimento é aqui derivada pelo *princípio dos trabalhos virtuais*.

8.2 CONCLUSÕES

Da aplicação dos modelos, foram apresentados resultados para a excitação de dois casos distintos, CE1 e CE2, a diferentes frequências de excitação. No primeiro modelo foram aplicadas as condições de fronteira de duplo encastramento e encastrado-livre. Nos restantes, apenas se considerou o duplo encastramento. A solução dinâmica dos sistemas foi apresentada sob a forma de representações gráficas da resposta no tempo, planos de fase, secções de Poincaré e espectros de amplitudes. Foram analisadas as respostas em regime permanente e transiente.

Conclui-se que os dois tipos de dano considerados originam comportamentos diferentes e, deste modo, não deverão ser considerados como aproximações um do outro.

Demonstrou-se que a redução de massa de um entalhe, responsável pela sua bidimensionalidade, implica em primeiro lugar que este nunca irá fechar e que, por isso, terá um comportamento linear. Em regime permanente, as respostas no tempo são simétricas, regulares com um período bem definido, de envelope plana e de traço uniforme. As órbitas no plano de fase são fechadas de aparência elíptica, simétricas e não distorcidas e as intersecções com a secção de Poincaré apresentam apenas um ponto discreto, em todos os casos. Estas características da solução mostram que os movimentos serão sempre lineares e periódicos na presença de um entalhe. Conclui-se que para baixas frequências, a existência deste tipo de dano praticamente não influencia a dinâmica das vigas. Para frequências na zona de ressonância verificam-se amplitudes de resposta distintas. Quer para uma excitação à frequência natural da viga intacta ou à frequência natural da viga com dano, verifica-se que as respostas as maiores amplitudes são da mesma ordem de grandeza das de amplitudes mais baixas. Mais, verifica-se que o desfasamento entre as ditas respostas é inferior a $\pi/2$ rad. Conclui-se por isso, que a queda de frequências devido ao entalhe é muito pequena e que a razões de frequências são muito próximas, como se comprovou pelo cálculo dessa razão. Em regime transiente, todas as respostas, nesta fase, são caracterizadas por duas frequências independentes. Verifica-se que em todos os casos as órbitas nos planos de fase apresentam ligeiras distorções, que indicam a existência de harmónicos fracos, e a secção de Poincaré mostra uma evolução em espiral entre os equilíbrios dinâmicos, antes e após a ocorrência de dano. Franco et al. [20] descrevem este tipo de transientes como oscilações quase periódicas temporárias, por estes apresentarem características semelhantes àsquelas de movimentos quase periódicos, em regime permanente. A

corroborar esta caracterização estão as curvas em espiral na secção de Poincaré. Se o transiente não se dissipasse, então as curvas seriam fechadas, característica essa de um movimento quase periódico de duas frequências [31]. Para baixas frequências, os transientes são de baixa intensidade e evoluem rapidamente no sentido da linearidade da resposta. À frequência $\omega = \omega_1$, observa-se que a rápida queda de amplitudes da resposta vibratória origina uma resposta transitória modelada em amplitude. Para $\omega = \omega_{2d}$, verifica-se um aumento gradual das amplitudes.

Em relação aos resultados obtidos com o conjunto alternativos de funções hermiteanas, derivadas pela teoria de Timoshenko, conclui-se que estas não introduzem qualquer melhoria na convergência das cinco primeiras frequências naturais.

Por outro lado, à fenda, que apenas é uma descontinuidade (unidimensional), é permitido impor previamente um comportamento bilinear. O mesmo será dizer que se impõe desde início que as respostas sejam não-lineares. Em regime permanente, para todas as frequências de excitação, as respostas no tempo são assimétricas, de maior amplitude no movimento descende da viga, para o qual se considera que a fenda está aberta. Profundidades de fenda maiores implicam assimetrias mais acentuadas. As projecções no plano de fase caracterizam-se por órbitas fechadas, distorcidas e assimétricas. A intersecção a secção de Poincaré origina apenas um ponto, para cada caso. Os espectros de amplitudes mostram a existência de harmónicos. Por estas observações, é possível definir o movimento das vigas como não-linear e periódico. Conclui-se que para frequências de baixas, as respostas são essencialmente modeladas pela geometria da fenda e da viga. Verifica-se que para as mesmas dimensões de viga, quanto maior a profundidade da fenda maior será a assimetria das respostas e mais intensos os harmónicos. Além disso, quanto maior o comprimento da viga, mais sensível esta será ao aumento da profundidade da fenda. Verificou-se que para $\omega = \omega_1/3$, a resposta do caso CE1 para a fenda de $h_f=0,02\text{m}$, que é a viga de maior comprimento e profundidade de fenda, apresenta uma forte assimetria e uma intermitência no topo. No plano de fase, este fenómeno traduz-se por pequenos cruzamentos. Poderá ser indício de algum tipo de bifurcação. Suspeita-se que possa ser uma *duplicação de período*, embora a secção de Poincaré não o demonstre. Por outro lado a elevadas frequências, a resposta dos sistemas será modelada pelas características do material, no sentido que a existência ou não de ressonância irá ditar amplitudes diferentes entre as vigas com e sem dano. Ao contrário do verificado para o entalhe, agora as respostas apresentam, para este tipo de excitação, amplitudes de ordem de grandeza distintas e um desfaseamento de aproximadamente $\pi/2$ rad, o que indica uma queda considerável das frequências naturais na presença de uma fenda unidimensional. Mostra-se também a

existência de uma frequência natural bilinear, que realça a existência de um compromisso entre cada uma das partes do movimento bilinear, que se limitam uma à outra e definem um comportamento único e não composto pela sobreposição de efeitos de duas partes distintas. A esta frequência a viga danificada atinge a sua máxima amplitude de resposta.

A resposta transiente, assim como no modelo anterior, caracteriza-se em todos os casos por duas frequências distintas e, desse modo, poder-se-á caracterizar por oscilações quase periódicas temporárias, de duas frequências, em intervalos finitos de tempo [20]. Verifica-se no entanto, que a intensidade do transiente é agora potenciada pela bilinearidade da fenda, o que resulta em transientes mais longos e de amplitudes mais acentuadas. As órbitas no plano de fase são bastante distorcidas e as curvas na secção de Poincaré evoluem em espiral, na forma de “galáxia”, desde o ponto exterior até ao ponto mais interior, refente ao novo equilíbrio dinâmico após a abertura da fenda. Demonstra-se que essa evolução é cíclica e que existe uma correspondência directa entre os pontos de cada ciclo. Conclui-se dessa forma que, caso o transiente não se dissipasse, a órbita resultante seria circular ou elíptica fechada, o que caracteriza movimentos quási periódicos de duas frequências, de acordo com a referência [31].

Foram ainda apresentados resultados para o modelo não-linear. Os resultados obtidos são formalmente iguais aos verificados com o modelo linear. Refira-se que, à excepção do verificado para $\omega = \omega_1$, os movimentos não apresentaram amplitudes suficientemente altas para entrarem em regime não-linear, o que justifica a semelhança formal dos contornos das respostas.

8.3 PROPOSTAS DE TRABALHO FUTURO

Num futuro próximo, pretende-se levar a análise com o modelo não-linear a extremos de amplitudes maiores, de forma a evidenciar a não-linearidade geométrica introduzida. Nessa altura será possível retirar conclusões mais aprofundadas sobre esta primeira aproximação, que deverão ser acompanhadas de resultados experimentais, que a validem ou refutem.

Após isso, o autor demonstra interesse em tentar desenvolver uma solução de forma fechada para a introdução de não-linearidade geométrica do tipo de Von Kármán na teoria de Christides e Barr. Até ao momento, o autor não tem conhecimento que tal tenha sido já publicado na literatura.

Seria também interessante, actualizar os modelos apresentados para o caso de dano inclinado de um certo ângulo, em relação à vertical. E, de preferência, mantendo os modelos unidimensionais. Seria também interessante tentar, se possível, introduzir o contacto entre as faces da fenda no modelo unidimensional. Tal pode ser feito em modelos bidimensionais, em *softwares* comerciais de elementos finitos [3] - [4]. Outra proposta seria introduzir o nos modelos o crescimento da fenda, com o número de ciclos do movimento.

Tendo em conta qualquer uma das propostas anteriores, será do maior interesse também estudar a dinâmica dos sistemas sob estas particularidades, uma vez que todas elas representam situações de interesse prático.

REFERÊNCIAS

- [1].Adhikari, Sondipon, e A. Srikantha Phani. “Rayleigh's Classical Damping Revisited.”
- [2].Adman, R., e H. Afra. “Exact shape functions of imperfect beam element for stability analysis.” *Advances in Engineering Software* 38 (2007): 576-585.
- [3].Andreus, Ugo, e Paolo Baragatti. “Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behavior of the harmonically forced response.” *Journal of Sound and Vibration*, (2011): 721-742.
- [4].Andreus, Ugo, Paolo Casini, e Fabrizio Vestroni. “Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation.” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42 (2007).
- [5].Augarde, Charles E. “Generation of shape functions for straight beam elements.” *Computers and Structures* 68 (1998): 555-560.
- [6].Babuska, I., B. A. Szabo, e I. N. Katz. “The p-Version of the FInite Element Method.” *SIAM J. Numer. Anal.*, 1981.
- [7].Babuska, I., M. Gribel, e J. Pitkaranta. “The Problem of selecting the shape functions for a p-type Finite Element” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 28 (1989): 1891- 1908
- [8].Bazoune, A., e Y. A. Khulief. “Shape Functions os Three-dimensional Timoshenko Beam Element.” *Journal of Sound and Vibration* 259 (2003): 473-480.
- [9].Caddemi, S., I. Calì, e M. Marletta. “The non-linear dynamic response of the Euler-Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks.” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 45 (2010): 714-726.
- [10]. Chatterjee, Animesh. “Crack Detection in a Cantilever Beam using Harmonic Probing and Free Vibration Decay.” *Proceedings of the IMAC-XXVII*, (2009).
- [11]. Chondros, T. G., A. D. Dimarogonas, e J. Yao. “A consistent Cracke Bar Vibration Theory.” *Journal of Sound and Vibration* 200 (1997): 303-313.
- [12]. Chondros, T. G., A. D. Dimarogonas, e J. Yao. “Vibration of a Beam with a Breathing Crack.” *Journal of Sound and Vibration* 239 (2001): 57-67.
- [13]. Chondros, T. G., e A. D. Dimarogonas. “Vibration of a Crackced Cantilever Beam.” *ASME* 120 (1998).
- [14]. Christides, S., e A. D. S. Barr. “One-dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams.” *International Journal of Mechanical Sciences*, (1984).
- [15]. Chu, Y. C., e M. H. H. Shen . “Analysis of Forced Bilinear Oscillators and the Application to Cracked Beam Dynamics.” *AIAA Journal* Vol. 30 (1992).
- [16]. Dimarogonas, A.D, Andrew D. “Vibration of Cracked Structures: a State of the Art Review .” *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 55 (1996): 831-857.
- [17]. Douka, E., e L.J. Hadjileontiadis. “Time–frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack.” *NDT&E International* 38 (2005): 3-10.
- [18]. Dwoyer, D. L., M. Y. Hussaini, e R. G. Voigt. *Finite Elements: Theory and Application*. Springer New York, 1988.

- [19]. El Bikri, K., R. Benamar, e M. M. Bennouna. "Geometrically non-linear free vibrations of clamped-clamped beams with an edge crack." *Computers and Structures* 84 (2006): 485-502.
- [20]. Franco, H., e R.M. Pauletti. "Quasi-periodic oscillations on a nonlinear transient." *Physics Letters A* 201 (1995): 281-284.
- [21]. Friswell, M. I., e J. E. T. Penny. "Crack Modeling for Structural Health Monitoring." *Structural Health Monitoring*, (2002).
- [22]. Giannini, O., P. Casini, e F. Vestroni. "Nonlinear harmonic identification of breathing cracks in beams." *Computers and Structures* 129 (2013): 166-177.
- [23]. Han, Seon M., Haym Benaroya, e Timothy Wei. "Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories." *Journal of Sound and Vibration*, (1999).
- [24]. HUANG, T. C. "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple End Conditions." *ASME*, (1961).
- [25]. *IMSL Fortran Library User's Guide MATH/LIBRARY Volume 1 of 2: Mathematical Functions in Fortran*. Visual Numerics, 1994.
- [26]. Kardestuncer, H. *Finite Element Handbook*. Mcgraw-Hill (Tx), 1987.
- [27]. Kisa, M., e J. Brandon. "THE Effects of Closure of Cracks on the Dynamics of a Cracked Cantilever Beam." *Journal of Sound and Vibration* 238 (2000): 1-18.
- [28]. Majkut, Leszek. "Free and Forced Vibrations os Tiomoshenko Beams Described by Single Difference Equation." *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 47 (2009): 193-210.
- [29]. Marur, P. R. "An Engineering Approach to Impact Analysis of Notched Beams by Convencioanl Beam Elements." *Computers & Structures* 59 (1996): 1115-1120.
- [30]. Nahvi, H., e M. Jabbari. "Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model." *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005): 1477-1497.
- [31]. Nayfeh, Aly H., e Balakumar Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [32]. Orban, F. "Damping of materials and members in structures." *Journal of Physics: Conference Serie* 268 (2011).
- [33]. Peng, Z.K., Z.Q. Lang, e F.L Chu. "Numerical analysis of cracked beams using nonlinear output frequency response functions." *Computers and Structures* 86 (2008): 1809-1818.
- [34]. Ribeiro, Pedro. "A p-version, first order shear deformation, finite element for geometrically non-linear vibration of curved beams." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004): 2696-2715.
- [35]. Rodrigues, J. Dias. *Vibrações de Sistemas Mecânicos: Apontamentos Teórico-Práticos*. Porto, 2013.
- [36]. Saavedra, P.N., e L.A. Cuitiño. "Crack detection and vibration behavior of cracked beams." *Computers and Structures* 79 (2001): 1451-1459.
- [37]. Shen, M. H. H., e C. Pierre. "Free Vibrations of Beams with a Single-Edge Crack." *Journal of Sound Vibration* 170 (1994): 237-259.

- [38]. Shen, M. H. H., e C. Pierre. “Natural Modes of Bernoulli-Euler Beams with Symmetric Cracks.” *Journal of Sound and Vibration* 138 (1990): 115-134.
- [39]. Sinha, J. K., M. I. Friswell, e S. Edwards. “Simplified Models for the Location of Cracks in Beam Structures using Measured Vibration Data.” *Journal of Sound and Vibration* 251 (2002): 13-38.
- [40]. Stephen, N.G. “The second spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment.” *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006): 372-389.
- [41]. Stephen, N.G., e S. Puchegger. “On the valid frequency range of Timoshenko beam theory.” *Journal of Sound and Vibration* 297 (2006): 1082–1087.
- [42]. Stojanovic, Vladimir, Pedro Ribeiro, e Stanislav Stoykov. “Non-linear vibrations of Timoshenko damaged beams by a new p-version finite element method.” *Computers and Structures*, (2013).
- [43]. Szabó, Barna, e Ivo Babuska. *Finite Element Analysis*. Wiley-Interscience, 1991.
- [44]. Zhigang, Yu, e Fulei Chu. “Identification of cracks in functionally graded material beams using the p-version of finite element method.” *Journal of Sound and Vibration* 325 (2009): 69-84.
- [45]. Petyt, Maurice. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- [46]. Han, Wanmin; Petyt, Maurice; Hsiao, Kuo-Mo. “An investigation into geometrically nonlinear analysis of rectangular laminated plates using the hierarchical finite element method”. *Finite Elements in Analysis and Design* 18 (1994): 273-288
- [47]. Liu, G., e S. Quek. *The Finite Element Method: A Practical Course*. Butterworth-Heinemann. 2003
- [48]. Zienkiewicz, O., & R. Taylor. *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*. Butterworth-Heinemann. 2000